Université de Rennes 1
UFR Mathématiques
2022-2023

Parcours d'Accès Spécifique Santé (PASS)
Option Informatique et option Mathématiques

Compléments maths PASS 1 (CMP1)

Algèbre - Raisonnement et vocabulaire ensembliste

Version provisoire du 3 janvier 2023

L'objet de ce cours est de faire une présentation rapide d'objets centraux en mathématiques comme les nombres, la logique, les ensembles et les applications.

Programme

Méthodologie mathématique Connecteurs logiques. Calcul propositionnel. Quantificateurs, variables. Démonstration : récurrence, contraposée, absurde.

Bases de la théorie des ensembles Éléments, parties, intersection, réunion, complémentaire, produit cartésien.

Introduction aux notions d'application, d'image, d'antécédent, d'injection, de surjection, de bijection, de composition, de restriction, de prolongement.

Manipulation des signes sommes, des indices.

1 Les nombres réels

Voici une courte présentation des nombres réels dans laquelle sont évoquées sans démonstration leurs principales propriétés ainsi que celles de réels particuliers comme les entiers naturels, les entiers relatifs et les rationnels.

1.1 Chiffres, nombres et écriture décimale

Idéogramme (d'après le dictionnaire de l'Académie française) "Signe graphique exprimant directement une idée, une notion, une unité de sens, et non pas un son isolé ou une syllabe. Les caractères chinois sont des idéogrammes. Les chiffres se lisent comme des idéogrammes."

Comme le dit l'Académie française, les chiffres de la base dix, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9, sont des idéogrammes, c'est à dire des symboles qui représentent des notions. Les notions dont il s'agit sont des quantités particulières. Ces chiffres permettent aussi en les combinant de représenter avec peu de symboles des quantités finies arbitrairement grandes et appelées entiers naturels. C'est le principe de l'écriture décimale. La figure 1 donne à la fois tous les chiffres et des exemples d'entiers naturels, zéro, un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix, onze et douze, représentés avec un ou deux chiffres.

Nombre (d'après le dictionnaire de l'Académie française) "Notion permettant d'indiquer la quantité d'éléments qui forment un ensemble d'êtres ou de choses, d'établir le rapport d'une quantité à une autre quantité de même nature, appelée unité et prise comme référence... (en mathématiques) Élément d'un ensemble défini par des propriétés opératoires, servant à compter, comparer, mesurer, calculer.

Cette définition suggère qu'il existe plusieurs notions de nombre. Dans cette partie cinq d'entre elles seront présentées en introduisant successivement les entiers naturels, les entiers relatifs, les décimaux les rationnels et les réels.

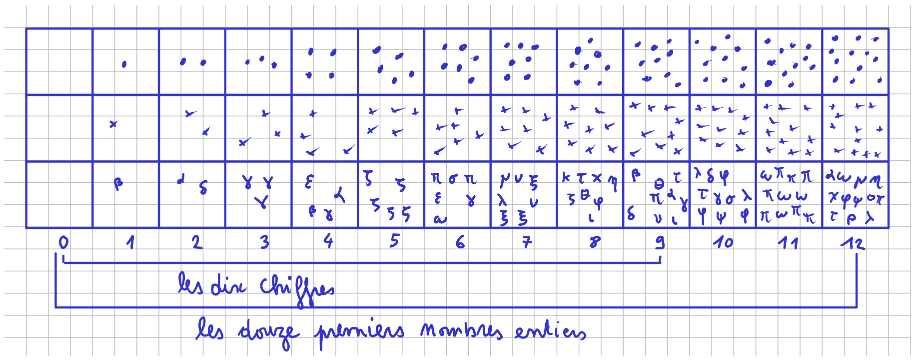


FIGURE 1 – Les chiffres de la base dix et quelques nombres

Écriture décimale Tous ces nombres dont il sera question admettent une écriture décimale dite aussi écriture en base dix. Il s'agit d'une écriture du type $\pm u_n ... u_i ... u_1, d_1 ... d_j ...$ où les u_i et les d_j sont des chiffres de la base dix et u_n est non nul sauf peut-être lorsque $n = 0$. Ainsi le rationnel $\frac{22}{7}$ admet comme début d'écriture $3,142857...$ avec $n = 1$, $u_1 = 3$, $d_1 = 1$, $d_2 = 4$, $d_3 = 2$, $d_4 = 8$, $d_5 = 4$, $d_6 = 7$,... Le signe + peut être omis mais pas le signe −. Sauf les nombres qui peuvent être écrits avec un nombre fini de décimales (c'est à dire ceux qui sont tels que la suite des d_j se termine par une infinité de 0 qu'on omet d'écrire) et qui admettent exactement deux écritures, tout nombre admet une et une seule écriture en base dix : $\frac{1}{3}$ admet comme unique écriture en base dix, $0,333333...$, alors que 1 admet deux écritures, 1 et $0,999999...$ Signalons aussi qu'inversement à toute écriture décimale correspond un nombre.

1.2 Des entiers naturels aux réels

L'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers naturels est formé des nombres de la comptine numérique : $0, 1, 2, 3, ..., 17, ..., 86, ..., 100, ..., 421, ..., 512, ...$ Ces nombres servent à compter le nombre d'éléments d'un ensemble et à comparer deux ensembles entre eux.

La figure 2 illustre, en prenant les exemples des nombres sept (7) et douze (12), comment reconnaître deux quantités représentée par le même entier naturel grâce à des traits couplant deux à deux des éléments des deux quantités.

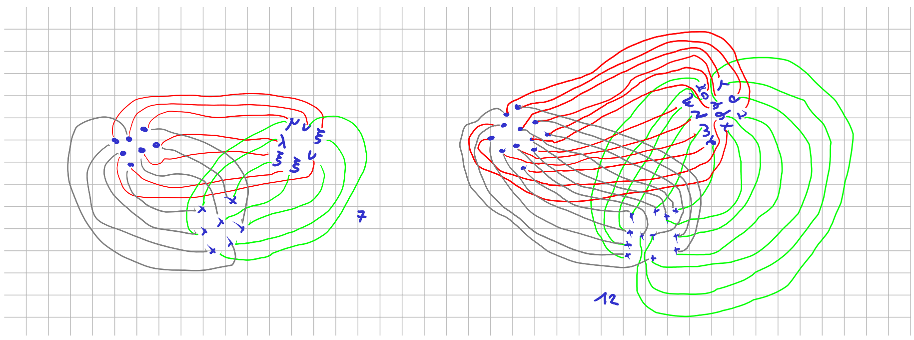


FIGURE 2 – Sept (7) et douze (12)

L'ensemble $\mathbf{Z}$ des entiers relatifs est formé des entiers naturels munis d'un signe + ou − : $..., -314, ..., -56, ..., -21, ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., 17, ..., 86, ..., 421, ..., 512, ...$ Tout entier naturel est un entier relatif : $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$.

L'ensemble $\mathbf{D}$ des décimaux est formé des nombres positifs ou négatifs dont l'écriture en base dix est finie : $-3,14$, 0 , 7 ou $1,602173634 \times 10^{-19}$ en sont des exemples. Tout entier relatif est un décimal : $\mathbf{Z} \subset \mathbf{D}$. Ce sont ceux qui admettent deux écritures dont l'une se termine en répétant 9 une infinité de fois.

L'ensemble $\mathbf{Q}$ des rationnels est formé des quotients de nombres relatifs par des entiers naturels non nuls : $-\frac{314}{271}$, $\frac{2}{3} = \frac{44}{66} = 0,666666666...$, 0 ou 1 en sont des exemples. Tout nombre décimal est un rationnel : $\mathbf{D} \subset \mathbf{Q}$.

Les rationnels sont caractérisés par leur écriture en base dix : d'une part l'écriture en base dix d'un rationnel se termine par la répétition infinie d'une séquence finie de chiffres et d'autre part toute écriture en base dix qui se termine par la répétition infinie d'une séquence finie de chiffres est l'écriture d'un rationnel.

L'ensemble $\mathbf{R}$ des réels est formé des nombres qui admettent une écriture en base dix quelconque. Tout rationnel est un réel : $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$. Un réel qui n'est pas un rationnel est dit irrationnel.

Un réel non nul est dit strictement positif si son écriture débute par le signe $+$ et il est dit strictement négatif si son écriture débute par le signe $-$. Par exemple, les entiers naturels non nuls sont strictement positifs.

Certains réels ne sont pas des rationnels. C'est le cas du réel x strictement positif qui admet 0 comme unique chiffre à gauche de la virgule et dont toutes les décimales sont nulles sauf celles de rang 1, 2, 4,...,2^n,..., $n \in \mathbf{N}$ qui prennent la valeur 1 :

$$x = 0,1101000100000001000000000000000001000...$$

L'écriture en base dix de ce réel n'est pas une écriture en base dix qui se termine par la répétition infinie d'une séquence finie de chiffres. Ce n'est donc pas un rationnel.

1.3 Les opérations sur les nombres

Ces cinq ensembles de nombres possèdent tous les nombres 0 et 1 et sont munis de deux opérations, des lois de composition interne en langage mathématique, l'addition et la multiplication, qui vérifient les propriétés suivantes.

Si x et y sont des nombres (entiers naturels, respectivement entiers relatifs, décimaux, rationnels, réels) alors les opérations d'addition et de multiplications leurs associent deux nombres (entiers naturels, respectivement entiers relatifs, décimaux, rationnels, réels) notés $(x + y)$ et $(x \times y)$ et appelés somme et produit de x et y. Quand il n'y a pas d'ambiguïté on peut omettre les parenthèses.

Le nombre 0 est le neutre pour l'addition : si x est un nombre alors $0 + x = x + 0 = x$.

Classiquement $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} \setminus \{0\}$, $\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, $\mathbf{D}^* = \mathbf{D} \setminus \{0\}$, $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Le nombre 1 est le neutre pour la multiplication : si x est un nombre alors $1 \times x = x \times 1 = x$.

Les opérations d'addition et de multiplication sont commutatives : si x et y sont des nombres alors $x + y = y + x$ et $x \times y = y \times x$.

Les opérations d'addition et de multiplication sont associatives : si x, y et z sont des nombres alors $x + (y + z) = (x + y) + z$ et $x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$.

L'opération de multiplication est distributive par rapport à celle d'addition : si x, y et z sont des nombres alors $x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$ et $(x + y) \times z = (x \times z) + (y \times z)$.

Tout nombre réel admet un opposé : si x est un nombre réel il existe un nombre noté $(-x)$ tel que $(-x) + x = x + (-x) = 0$. Si x est un relatif (respectivement, décimal, respectivement rationnel) alors $(-x)$ l'est aussi. En revanche si x est un entier naturel non nul alors $(-x)$ est un relatif mais n'est pas un entier naturel non nul.

L'opposé de la somme $x+y$ de deux réels est la somme des opposés : $(-(x+y)) = (-x)+(-y)$.

Tout nombre réel non nul admet un inverse (pour la multiplication) : si x est un nombre réel différent de 0 il existe un nombre noté (x^{-1}) ou $\left(\frac{1}{x}\right)$ tel que $(x^{-1}) \times x = x \times (x^{-1}) = 1$. Si x est rationnel non nul alors (x^{-1}) l'est aussi. En revanche si x est un décimal qui n'est pas une puissance de 10, c'est à dire dont l'écriture décimale ne contient qu'un chiffre non nul, 1, et qui n'apparaît qu'une seule fois, alors (x^{-1}) est un relatif mais n'est pas un décimal.

L'inverse du produit $x \times y$ de deux réels non nul est le produit des inverses : $\frac{1}{(x \times y)} = \left(\frac{1}{x}\right) \times \left(\frac{1}{y}\right)$.

On peut vérifier en utilisant l'associativité de l'addition et de la multiplication que l'opposé d'un nombre est unique et que si ce nombre est non nul son inverse est unique.

1.4 Les puissances entières et rationnelles

Soit x un réel. On pose $x^0 = 1$. Si n un entier naturel x^n désigne la multiplication n fois de x par lui-même. En particulier $x^0 = 1$ et $x^{n+1} = (x^n) \times x$. Si n est un entier relatif négatif strictement ($-n$ est alors un entier naturel) alors x^n est l'inverse de x^{-n} : $x^n = \frac{1}{x^{-n}}$. On a $x^n = \left(\frac{1}{x}\right)^n$. Le nombre x^n est appelé x puissance n.

Si $x, y \in \mathbf{R}$ et $n, m \in \mathbf{Z}$ alors $(xy)^n = (x^n) \times (y^n)$, $x^{n+m} = (x^n) \times (x^m)$ et $(x^n)^m = x^{n \times m}$.

Si x est un réel positif ou nul et si n est un entier naturel non nul alors il existe un unique réel positif ou nul y tel que $y^n = x$. On note $x^{\frac{1}{n}}$ ce réel. Le nombre $x^{\frac{1}{n}}$ est appelé racine n-ième de x. Notons que si x est rationnel positif le nombre $x^{\frac{1}{n}}$ n'est pas nécessairement rationnel.

Si x est un réel positif ou nul et $r = \frac{p}{q}$ est un rationnel avec $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}$ non nul alors on définit x puissance r comme étant le nombre $x^r = (x^p)^{\frac{1}{q}}$. Cette définition ne dépend pas du choix de p et q mais seulement de r.

Si $x, y > 0$ et $r, s \in \mathbf{Q}$ alors $(xy)^r = (x^r) \times (y^r)$, $x^{r+s} = (x^r) \times (x^s)$ et $(x^r)^s = x^{r \times s}$.

Remarquons que si x est un décimal dont l'écriture décimale est $\pm u_n ... u_i ... u_1, d_1 ... d_j ... d_m$ alors $x = \pm(u_1 10^0 + ... + u_n 10^{n-1} + d_1 10^{-1} + ... + d_m 10^{-m})$.

1.5 L'ordre sur les nombres

Un ensemble E est muni d'un relation d'ordre (ou simplement d'un ordre) qu'on notera $\leq$ si quels que soient x, y et z dans E alors
- $x \leq x$ (la relation d'ordre $\leq$ est dite réflexive),
- si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$ (la relation d'ordre $\leq$ est dite antisymétrique),
- si $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$ (la relation d'ordre $\leq$ est dite transitive).

Les cinq ensembles de nombres $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{R}$ sont munis d'un ordre. Quand on prend deux nombres x et y, soit ils sont égaux ($x = y$), soit l'un est strictement supérieur à l'autre : $x < y$ si $(y - x)$ est strictement positif et $y < x$ si $(x - y)$ est strictement positif. Si y est strictement supérieur à x on dit aussi que x est strictement inférieur à y

Un réel x qui vérifie $0 < x$ ou $0 = x$ est dit positif ou nul : on écrit alors $0 \leq x$. Un réel x qui vérifie $x < 0$ ou $0 = x$ est dit négatif ou nul : on écrit alors $x \leq 0$.

Classiquement $\mathbf{Z}_+ = \{x \in \mathbf{Z}, x \geq 0\} = \mathbf{N}$, $\mathbf{Z}_+^* = \{x \in \mathbf{Z}, x > 0\} = \mathbf{N}^*$. De façon analogue $\mathbf{D}_+ = \{x \in \mathbf{D}, x \geq 0\}$, $\mathbf{D}_+^* = \{x \in \mathbf{D}, x > 0\}$, $\mathbf{Q}_+ = \{x \in \mathbf{Q}, x \geq 0\}$, $\mathbf{Q}_+^* = \{x \in \mathbf{Q}, x > 0\}$, $\mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R}, x \geq 0\}$, $\mathbf{R}_+^* = \{x \in \mathbf{R}, x > 0\}$.

Entre un entier naturel ou relatif n et l'entier $n + 1$ appelé successeur de n il n'y a aucun entier : un nombre z qui vérifie $n < z < n + 1$ n'est jamais entier. Par exemple l'entier naturel 315 est le successeur de l'entier naturel 314.

L'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers naturels possède deux propriétés remarquables en lien avec l'ordre et cette notion de successeur. D'une part tout sous-ensemble non vide de $\mathbf{N}$ admet un plus petit élément. C'est un entier naturel appartenant au sous-ensemble et qui est inférieur à tous les autres entiers naturels de ce sous-ensemble. D'autre part tout sous-ensemble non vide de $\mathbf{N}$ pour lequel il existe un majorant, c'est à dire un entier naturel pas nécessaire dans ce sous-ensemble mais supérieur à tous les entiers naturels de cet ensemble, admet aussi un plus grand élément. C'est un entier naturel appartenant au sous-ensemble et qui est supérieur à tous les autres entiers naturels de ce sous-ensemble.

La propriété de successeur est vrai dans $\mathbf{Z}$. En revanche, dans $\mathbf{D}$, $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{R}$ la notion de successeur n'a pas d'intérêt car si x et y sont deux réels (ou de rationnels ou deux décimaux) qui vérifient $x < y$ alors il existe un décimal z tel que $x < z < y$.

L'ordre sur $\mathbf{R}$ se comporte bien par rapport aux deux opérations. Si x, y et z sont des nombres et si $x < y$ alors $x + z = z + x < y + z = z + y$. Si x, y et z sont des nombres et si $x < y$ et $0 < z$ alors $x \times z = z \times x < y \times z = z \times y$.

Soit x un réel non nul. Si $0 < x$ alors $0 < (x^{-1})$ et $(-x) < 0$ et si $x < 0$ alors $(x^{-1}) < 0$ et $0 < (-x)$.

La partie entière $E(x)$ d'un réel x est définie de la façon suivante. Si x est strictement positif ou s'il est nul, c'est l'entier naturel dont l'écriture coïncide avec celle des termes qui apparaissent à gauche de la virgule dans l'écriture de x. Si x est strictement négatif, c'est l'entier relatif qui précède celui dont l'écriture coïncide à celles des termes qui, dans l'écriture de x, apparaissent à gauche de la virgule.

Si x est un nombre réel alors sa partie entière $E(x)$ est l'unique entier relatif qui vérifie la double inégalité $E(x) \leq x < E(x) + 1$.

L'existence de la division euclidienne, c'est à dire le fait que si a est entier relatif et si b est un entier naturel non alors il existe un unique couple (q, r) d'entiers relatifs tel que $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$, est une conséquence directe des propriétés précédentes.

La valeur absolue $|x|$ d'un réel x est le plus grand des deux nombres x et $-x$: si $0 \leq x$ alors $|x| = x$ et si $x \leq 0$ alors $|x| = -x$. Si x réel alors $-|x| \leq x \leq |x|$.

On peut vérifier que si x et y sont deux réels alors $||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$.

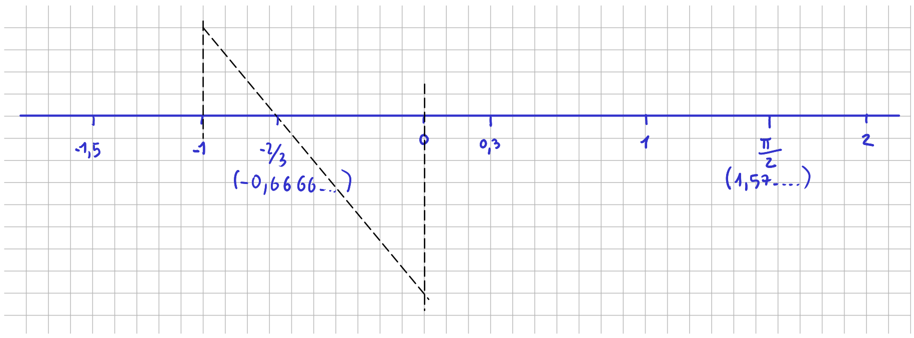


FIGURE 3 – Quelques réels

1.6 Retour sur l'écriture décimale

Si $x \in \mathbf{R}^+$ admet comme écriture décimale $u_n...u_i...u_1, d_1...d_j...$ avec les u_i et les d_j dans $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ alors pour tout $m \in \mathbf{N}$

$(u_1 10^0 + ... + u_n 10^{n-1} + d_1 10^{-1} + ... + d_m 10^{-m}) \leq x < (u_1 10^0 + ... + u_n 10^{n-1} + d_1 10^{-1} + ... + d_m 10^{-m}) + 10^{-m}$.

Le nombre $(u_1 10^0 + ... + u_n 10^{n-1} + d_1 10^{-1} + ... + d_m 10^{-m})$ qui est aussi noté

$$\left(\sum_{i=1}^{n} u_i \times 10^i + \sum_{j=1}^{m} d_j \frac{1}{10^j} \right)$$

est un décimal et $10^m \times (u_1 10^0 + ... + u_n 10^{n-1} + d_1 10^{-1} + ... + d_m 10^{-m})$, c'est à dire

$$10^m \times \left(\sum_{i=1}^{n} u_i \times 10^i + \sum_{j=1}^{m} d_j \frac{1}{10^j} \right),$$

est égal à la partie entière $E(10^m \times x)$ de $10^m \times x$.

L'ensemble $\mathbf{R}$ des réels possède une remarquable propriété en lien avec l'ordre. Considérons un sous-ensemble non vide de $\mathbf{R}$ et supposons qu'il existe un réel inférieur ou égal à tous les nombres ce sous-ensemble. Alors, parmi tous les réels inférieurs ou égaux à tous les nombres ce sous-ensemble, l'un est plus grand que tous les autres : il est appelé borne inférieure du sous-ensemble considéré. Par exemple le réel $\sqrt{2}$ qui n'est pas un rationnel est la borne inférieure du sous-ensemble formé des rationnels positifs et de carré supérieur ou égal à 2.

2 Logique

Raisonnement (d'après le dictionnaire de l'Académie française) "Manière dont l'esprit enchaîne les unes aux autres des propositions pour établir une vérité (par opposition à l'intuition, au sentiment, à la croyance) ; suite ordonnée de raisons, ensemble d'arguments qui s'enchaînent de façon à démontrer, à prouver, à convaincre. La logique est la science des règles formelles qui fondent le raisonnement..."

Dans les sciences expérimentales un principe essentiel qui guide le raisonnement et de partir des expériences pour tirer des conclusions générales. Lorsqu'on procède ainsi on parle d'un raisonnement inductif. Si ceci est bien adapté au cadre expérimental, ça l'est moins en mathématiques quand on veut démontrer. Par exemple, conclure que les entiers naturels premiers sont les nombres impairs différents de 1 parce que 3, 5 et 7 le sont illustre un usage inadapté du raisonnement inductif. En mathématiques on procède différemment. On part de propriétés générales pour en déduire des propriétés particulières. Pour y arriver on met en place un raisonnement déductif. Le raisonnement inductif sera utilisé pour poser des conjectures qui sont les questions que les mathématiques cherchent à résoudre.

Les mathématiques étudient des propositions (ou des propriétés, des assertions, des prédicats, des énoncés, des formules) et le raisonnement mathématique consiste, en partant de propositions connues pour vraies et en utilisant des règles de déduction, à démontrer une nouvelle proposition.

2.1 Connecteurs logiques

Un prédicat en mathématiques est l'équivalent d'une phrase dans une langue, c'est à dire un assemblage de mots qui obéit à certaines règles.

Pour réaliser ces assemblage on recourt à des connecteurs logiques qui servent à produire de nouveaux prédicats à partir de plus anciens. Voici cinq connecteurs fondamentaux. Le premier est un connecteur unaire. Il agit sur un prédicat. Les autres sont des connecteurs binaires. Ils agissent sur un couple de prédicats.

2.1.1 La négation

Si P est un prédicat alors lui est associée sa négation qui est notée $\neg P$ ou $\overline{P}$ ou encore non(P). Il est a noter que la négation de la négation d'un prédicat est le prédicat lui-même : $\neg\neg P = P$ $(\neg\neg P = P$, non(non$(P) = P)$.

2.1.2 La conjonction

Si P et Q sont deux prédicats alors leur est associée leur conjonction qui est notée indifféremment $P \wedge Q$, $Q \wedge Q$, P et Q, Q et P.

2.1.3 La disjonction

Si P et Q sont deux prédicats alors leur est associée leur disjonction qui est notée indifféremment $P \vee Q$, $Q \vee Q$, P ou Q, Q ou P.

2.1.4 L'implication

Si P et Q sont deux prédicats alors leur est associée l'implication de Q par P notée indifféremment $P \Rightarrow Q$, P implique Q.

2.1.5 L'équivalence

Si P et Q sont deux prédicats alors leur est associée l'équivalence de P et Q notée indifféremment $P \Leftrightarrow Q$, $Q \Leftrightarrow P$, P est équivalent à Q, Q est équivalent à P, P et Q sont équivalents, Q et P sont équivalents.

2.2 Calcul propositionnel et tables de vérité

2.2.1 Enchaînement de connecteurs et de prédicats

Pour construire un prédicat à partir de prédicat on enchaîne connecteurs et prédicats. On utilise des parenthèses pour lever les ambiguïtés. Une parenthèse ouvrante est toujours associée à une parenthèse fermante qui la suit et si une parenthèse est comprises entre deux parenthèses associées la parenthèse qui lui est associée est aussi entre ces deux parenthèses. Par exemple $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ est un prédicat mais $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q) \Rightarrow R($ n'est pas une écriture autorisée.

2.2.2 Calcul propositionnel

Un prédicat peut être soit vrai soit faux. Le calcul propositionnel consiste à construire grâce à l'usage de connecteurs logiques des prédicats à partir de prédicats initiaux connus pour être vrais (ou faux) et à ensuite déterminer si les prédicats produits sont vrais ou faux.

Les règles de déduction sont données par les tables suivantes dites tables de vérité. Dans ces tables V signifie que le prédicat est vrai et F qu'il est faux.

Table de la négation

P	$\neg P$
V	F
F	V

Ceci signifie que si un prédicat P est vraie alors sa négation $\neg P$ est fausse et s'il est faux sa négation $\neg P$ est vraie.

Table de la conjonction

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ceci signifie que $P \wedge Q$ est vrai si P est vrai et Q est vrai et que sinon $P \wedge Q$ est faux.

Table de la disjonction

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ceci signifie que $P \vee Q$ est faux si P est faux et Q est faux et que sinon $P \vee Q$ est vrai.

Table de l'implication

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ceci signifie que $P \Rightarrow Q$ est vrai sauf si P est vrai et Q est faux.

Table de l'équivalence

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ceci signifie que $P \Leftrightarrow Q$ est vrai lorsque P et Q sont simultanément vrais ou simultanément faux.

Table associée à des enchaînements de connecteurs et de prédicats

On peut calculer la table associée à un enchaînement de connecteurs. Par exemple la table associée au prédicat $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ est

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	V
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V

.

Lorsque deux enchaînements de connecteurs donnent les mêmes tables on peut utiliser indifféremment l'un ou l'autre.

Ainsi la table de $\neg(\neg P \wedge \neg Q)$ ci-dessous est la même que celle de $P \vee Q$:

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \wedge \neg Q$	$\neg(\neg P \wedge \neg Q)$
V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	F

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

.

De même la table de $\neg P \vee Q$ ci-dessous est la même que celle de $P \Rightarrow Q$:

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

.

Enfin, la table de $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ ci-dessous est la même que celle de $P \Leftrightarrow Q$:

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

.

2.3 Le langage de la théorie des ensembles

Le langage de la théorie des ensembles repose sur les symboles suivants :
- les connecteurs logiques : $\wedge$ (et), $\neg$ (non), $\vee$ (ou), $\Rightarrow$ (implique) ;
- le quantificateur existentiel $\exists$ (il existe) et le quantificateur universel $\forall$ (pour tout) ;
- les parenthèses (et) ;
- des lettres appelées variables ;
- le symbole $=$ (est égal à) ;
- le symbole $\in$ (appartient à) qui est spécifique à la théorie des ensembles
- le symbole $|$ qui indique une substitution.

Ces symboles permettent d'écrire des formules ou prédicats en respectant quelques règles :
- si x et y sont deux variables alors $x = y$ et $x \in y$ sont des prédicats sans variable liée et dont les variables libres sont x et y ;
- si A est un prédicat alors $\neg A$ est un prédicat qui possède les mêmes variables liées et les mêmes variables libres que A ;
- si x est une variable libre du prédicat A alors $\exists x A$ et $\forall x A$ sont des prédicats dont les variables libres sont celles de A à l'exception de x et les variables liées sont celles de A auxquelles est ajoutée x ($\exists x$ se lit "il existe x tel que" et $\forall x$ se lit "pour tout x") ;
- si A et B sont des prédicats tels que si une variable est libre pour l'un elle n'est pas liée pour l'autre alors $A \wedge B$, $A \vee B$ et $A \Rightarrow B$ sont des prédicats dont les variables libres et les variables liées sont celles de A et B ;
- si x est une variable libre du prédicat A et y n'est pas une variable liée de A alors $A(y|x)$ est le prédicat obtenu en substituant y à x dans A.

Les prédicats $\neg(x = y)$ et $\neg(x \in y)$ s'écrivent également $x \neq y$ et $x \notin y$.

Un prédicat A qui possède comme variables libres les variables $x_1, ..., x_n$ peut être noté $A(x_1, ..., x_n)$.

Un prédicat sans variable libre s'appelle une assertion.

Un prédicat est souvent formé de prédicats imbriqués. Il peut être utile d'utiliser des parenthèses pour faciliter la lecture et lever toute ambiguïté. En l'absence de parenthèses on suivra l'ordre de priorité suivant : $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists$. Ainsi $\neg A \wedge B \vee C \Rightarrow D$ est le même prédicat que $((\neg A) \wedge (B \vee C)) \Rightarrow D$. Lorsque le connecteur $\Rightarrow$ (ou le connecteur $\vee$ ou le connecteur $\wedge$) apparaît plusieurs fois sans parenthèse on associe à droite : ainsi $A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow D$ est le même prédicat que $A \Rightarrow (B \Rightarrow (C \Rightarrow D))$.

2.4 Les principes de la démonstration

Faire une démonstration consiste, en appliquant certaines règles de déduction, à déterminer si un prédicat est vrai ou faux sous certaines hypothèses. Avec ce point de vue la vérité est relative. On part d'une famille de prédicats supposés vrais (hypothèse) et on espère qu'en appliquant certaine règles on pourra montrer qu'un prédicat donné est vrai (conclusion). Au cours d'une démonstration on peut être amené à rajouter puis à abandonner de nouvelles hypothèses dites hypothèses auxiliaires. Voici les treize règles qui généralisent les tables de vérité des connecteurs.

— **Le modus ponens** Si A est vrai et $A \Rightarrow B$ est vrai alors B est vrai.
— **L'abandon de l'hypothèse auxiliaire** Si en supposant A vrai (c'est à dire en considérant qu'on rajoute A comme une hypothèse supplémentaire) on démontre que B est vrai alors $A \Rightarrow B$ est vrai.
— **L'analyse** Si $A \wedge B$ est vrai alors A est vrai et B est vrai.
— **La synthèse** Si A est vrai et B est vrai alors $A \wedge B$ est vrai.
— **La disjonction des hypothèses** Si $A \Rightarrow C$ est vrai et $B \Rightarrow C$ est vrai alors $(A \vee B) \Rightarrow C$ est vrai.
— **L'affaiblissement d'une thèse** Si A est vrai alors $A \vee B$ est vrai et $B \vee A$ est vrai.
— **La réduction à l'absurde ou reductio ad absurdum** Si $A \Rightarrow (B \wedge \neg B)$ alors $\neg A$ est vrai.
— **La double négation** Si $\neg\neg A$ est vrai alors A est vrai.
— **La singularisation** Si $\forall x A(x)$ est vrai et si y n'est pas une variable liée de A alors $A(y|x)$ est vrai.
— **La généralisation** Si A est vrai, si $A \Rightarrow B(x)$ et si x n'est pas une variable libre de A alors $\forall x B(x)$ est vrai.
— **Preuve directe de l'existence** Si $A(x)$ est vrai alors $\exists x A(x)$ est vrai.
— **Conséquence de l'existence** Si $\exists x A(x)$ est vrai, si $A(x) \Rightarrow B$ est vrai et si x n'est pas une variable libre de B alors B est vrai.
— **Répétition** Si B est démontré sous l'hypothèse auxiliaire A on peut répéter B tant que A n'est pas abandonnée.

Ces règles de déduction sont celles de la logique classique, en particulier la règle de la double négation que n'acceptent pas certains logiciens dits intuitionnistes.

Une proposition est l'énoncé d'un prédicat vrai. Il prend souvent l'une des formes suivantes :

proposition $A \Rightarrow B$
proposition *Si A est vrai alors B est vrai.*
proposition *Si A alors B.*

où A est l'hypohèse et B la conclusion. Suivant l'intérêt qu'on porte à une proposition on l'appellera théorème (d'un intérêt théorique) ou lemme (d'un intérêt pratique pour démontrer des théorèmes ou des propositions).

En utilisant ces règles de déduction on démontre que si A B et C sont des prédicats alors

— **La contraposée ou modus tollens**

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

— **Le tiers exclu**

$$A \vee \neg A$$

— **La non contradiction**

$$\neg(A \wedge \neg A)$$

— **Du faux découle ce que l'on veut ou ex falso sequitur quodlibet**

$$(A \wedge \neg A) \Rightarrow B$$

— **La transitivité de l'implication**

$$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

— **La loi de Peirce**

$$((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$$

— **Les lois de Morgan**

$$\begin{array}{rcl}(\neg A \wedge \neg B) & \Rightarrow & \neg(A \vee B)\\ (\neg A \vee \neg B) & \Rightarrow & \neg(A \wedge B)\\ \neg(A \vee B) & \Rightarrow & (\neg A \wedge \neg B)\\ \neg(A \wedge B) & \Rightarrow & (\neg A \vee \neg B)\end{array}$$

Ces propositions ne dépendent pas des prédicats A, B et C. C'est ce qu'on appelle des tautologies.

L'équivalence entre deux prédicats, notée $A \Leftrightarrow B$, peut être définie comme étant le prédicat $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$. Ceci est en cohérence avec la coïncidence des tables de vérité correspondante. Lorsque $A \Leftrightarrow B$ est vraie on dit A est équivalent à B.

Donnons un exemple de raisonnement en établissant que si A et B sont deux prédicats alors $A \Leftrightarrow B$ vrai si et seulement si A et B sont vrais ou si $\neg A$ et $\neg B$ sont vrais. Supposons donc $A \Leftrightarrow B$ vrai. D'après le principe du tiers exclu soit A est vrai soit $\neg A$ est vrai. Si A est vrai alors B est vrai d'après le modus ponens. Si $\neg A$ est vrai alors $\neg B$ est vrai d'après le modus tollens. Réciproquement si A et B sont vrais ou si $\neg A$ et $\neg B$ sont vrais alors $A \Leftrightarrow B$.

On a les tautologies suivantes. Soient A, B et C des prédicats.

— (commutativité, associativité et distributivité de $\wedge$ et $\vee$)

$$\begin{array}{rcl}(A \wedge B) & \Leftrightarrow & (B \wedge A)\\ (A \vee B) & \Leftrightarrow & (B \vee A)\\ ((A \wedge B) \wedge C) & \Leftrightarrow & (A \wedge (B \wedge C))\\ ((A \vee B) \vee C) & \Leftrightarrow & (A \vee (B \vee C))\\ ((A \vee B) \wedge C) & \Leftrightarrow & ((A \wedge C) \vee (B \wedge C))\\ ((A \wedge B) \vee C) & \Leftrightarrow & ((A \vee C) \wedge (B \vee C))\end{array}$$

—

$$\begin{array}{rcl}(A \wedge B) & \Leftrightarrow & \neg(\neg B \vee \neg A)\\ (A \vee B) & \Leftrightarrow & \neg(\neg B \wedge \neg A)\end{array}$$

Ainsi $\neg$ et $\wedge$ permettent d'exprimer $\vee$ et $\neg$ et $\vee$ permettent d'exprimer $\wedge$.

—

$$(A \Rightarrow B) \quad \Leftrightarrow \quad (\neg A \vee B)$$

Ceci confirme ce qu'indiquaient les tables de vérité, à savoir que $\Rightarrow$ s'exprime à l'aide de $\neg$ et $\vee$.

Nous donnons maintenant une série de tautologies liées à $\forall$ et $\exists$. Le recours aux règles de singularisation, de généralisation, de preuve directe de l'existence et de conséquence de l'existence est nécessaire pour les établir.

Si A et B sont des prédicats alors

$$\begin{array}{rcll}(\exists x A) & \Leftrightarrow & \neg(\forall x \neg A) & \\ (\forall x A) & \Leftrightarrow & \neg(\exists x \neg A) & \\ (\exists x \exists y A) & \Leftrightarrow & (\exists y \exists x A) & \\ (\forall x \forall y A) & \Leftrightarrow & (\forall y \forall x A) & \\ (\forall x(A \wedge B)) & \Leftrightarrow & (A \wedge (\forall x B)) & \text{si } x \text{ n'est pas une variable libre de } A\\ (\forall x(A \vee B)) & \Leftrightarrow & (A \vee (\forall x B) & \text{si } x \text{ n'est pas une variable libre de } A\\ (\forall x \forall y(A \wedge B)) & \Leftrightarrow & ((\forall x A) \wedge (\forall y B)) & \text{si } x \text{ n'est pas une variable libre de } B\\ & & & \text{et } y \text{ n'est pas une variable libre de } A\\ (\forall x \forall y(A \vee B)) & \Leftrightarrow & ((\forall x A) \vee (\forall y B)) & \text{si } x \text{ n'est pas une variable libre de } B\\ & & & \text{et } y \text{ n'est pas une variable libre de } A.\end{array}$$

L'ordre entre quantificateur universel ($\forall$) et existentiel ($\exists$) est important. En général les prédicats $\exists x \forall y A$ et $\forall y \exists x A$ ne sont pas synonymes. En revanche $(\exists x \forall y A) \Rightarrow (\forall y \exists x A)$ est toujours vrai.

D'une certaine façon le travail mathématique consiste à déterminer la véracité de prédicats. Dans un texte mathématique on rencontre des assertions dont on sait qu'elles sont vraies, dans ce cas on ne l'indique généralement pas, et d'autres dont on essaie de savoir si elles le sont.

Dans la suite on aura pour règle d'éviter le plus possible de représenter les connecteurs logiques et les quantificateurs par les symboles $\wedge$, $\neg$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\exists$ et $\forall$. On préférera les paraphraser par des mots du langage courant.

2.5 Raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence est un raisonnement qui permet d'établir que des propriétés P_n indexées par les entiers naturels supérieurs ou égaux à un entier naturel p donné sont toutes vraies. Il suffit de montrer que la propriété P_p est vraie (initialisation ou vérification au rang initial) et de montrer que si n est un entier naturel quelconque supérieur ou égal à p la véracité de la propriété P_n entraîne la véracité de la propriété P_{n+1} (hérédité). Il y a un point subtil dans ce raisonnement. Lorsqu'on le fait on ne sait pas si P_n est vraie, on ne fait que le supposer. Pour que le raisonnement soit complet il est indispensable de vérifier que P_p est vraie.

Le principe du raisonnement par récurrence repose sur le résultat suivant.

Considérons un sous-ensemble non vide E de $\mathbf{N}$ qui vérifie la propriété suivante : le successeur de tout élément de E est dans E, c'est à dire que pour tout entier naturel n, $n+1 \in E$ dès que $n \in E$. Alors il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $E = \{n \in \mathbf{N} | n \geq p\}$.

Prouvons ce résultat. Puisque E est un sous-ensemble non vide de $\mathbf{N}$, il possède un plus petit élément qu'on va noter p. Alors $p \in E$ et $E \subset \{n \in \mathbf{N} | n \geq p\}$. On raisonne par l'absurde en supposant que $E \neq \{n \in \mathbf{N} | n \geq p\}$ et en obtenant sous cette hypothèse une contradiction. L'hypothèse $E \neq \{n \in \mathbf{N} | n \geq p\}$ entraîne que $\{n \in \mathbf{N} | n \geq p\} \setminus E$ est un sous-ensemble non vide de $\mathbf{N}$. Il possède donc un plus petit élément qu'on va noter q. De $\{n \in \mathbf{N} | n \geq p\} \setminus E \subset \{n \in \mathbf{N} | n \geq p\}$ on déduit que $q \geq p$ et puisque $p \in E$ nécessairement $q > p$. Par conséquent $q - 1 \geq p$ et donc $q - 1 \in E$. Puisque le successeur de tout élément de E est dans E on en déduit que $q = (q-1) + 1 \in E$ puisque c'est le successeur de $q - 1$ qui est dans E. Ceci n'est pas possible. Par conséquent l'hypothèse $E \neq \{n \in \mathbf{N} | n \geq p\}$ est fausse et $E = \{n \in \mathbf{N} | n \geq p\}$.

Revenons au raisonnement par récurrence. L'ensemble $\{n \in \mathbf{N} | P_n \text{ est vraie}\}$ des entiers naturels n pour lesquels P_n est vraie est non vide car il contient comme plus petit élément p et il est tel que si n appartient à cet ensemble (i.e. si P_n est vraie) alors son successeur $n+1$ appartient aussi à cet ensemble (i.e. P_{n+1} est aussi vraie). L'ensemble $\{n \in \mathbf{N} | P_n \text{ est vraie}\}$ est donc l'ensemble E précédent. Il est donc égal à $\{n \in \mathbf{N} | n \geq p\}$. Ceci signifie que P_n est vraie pour tous les entiers n supérieurs ou égaux à p.

3 Ensembles

3.1 Les axiomes de la théorie des ensembles

La théorie des ensembles consiste à considérer une collection d'objets appelés ensembles et caractérisés par certaines propriétés qu'on va décrire : les axiomes de la théorie des ensembles. Ils fondent la théorie des ensembles. De ces axiomes on pourra déduire ensuite la véracité de prédicats : on établira des propositions qui préciseront des propriétés caractéristiques des ensembles et déduites des axiomes. La famille de ces propositions formera la connaissance que l'on a de la théorie des ensembles.

Voici maintenant les propriétés fondamentales (axiomes) qui décrivent les ensembles et leurs relations. Ces propriétés sont énoncées sous deux formes. D'abord à l'aide d'une phrase, ensuite à l'aide d'une assertion construite avec les règles syntaxiques exposées précédemment.
1 - Deux ensembles sont égaux si tout élément de l'un est élément de l'autre :

$$\forall x \forall y((x = y) \Leftrightarrow (\forall z((z \in x) \Leftrightarrow (z \in y))).$$

2 - Il existe un ensemble sans élément. Il est appelé ensemble vide et noté $\emptyset$:

$$\exists x \forall y(\neg(y \in x)).$$

3 - Étant donnés deux ensembles il existe un ensemble appelé paire dont les éléments sont exactement ces deux ensembles. Si les deux ensembles donnés sont égaux alors on parle de singleton associé à cet ensemble donné :

$$\forall x \forall y \exists z \forall t(((x \in z) \wedge (y \in z)) \wedge ((t \in z) \Rightarrow ((t = x) \vee (t = y)))).$$

4 - Étant donné un ensemble il existe un ensemble dont les éléments sont exactement les éléments des éléments de cet ensemble donné. C'est la réunion des ensembles qui sont éléments de l'ensemble donné :

$$\forall x \exists y \forall z((\exists t((z \in t) \wedge (t \in x))) \Leftrightarrow (z \in y)).$$

5 - Étant donné un ensemble et une prédicat $A(x)$ alors les éléments a de l'ensemble donné tels que $A(a)$ est vraie forment un ensemble. C'est le sous-ensemble de l'ensemble donné défini par compréhension à partir du prédicat $A(x)$:

$$\forall X \exists Y \forall x((x \in Y) \Leftrightarrow ((x \in X) \wedge (A(x)))).$$

Il est noté $\{x \in X : A(x)\}$.
6. Étant donné un ensemble il existe un ensemble dont les éléments sont exactement les ensembles dont les éléments sont également des éléments de l'ensemble donné. Cet ensemble est l'ensemble des parties ou des sous-ensembles de l'ensemble donné :

$$\forall x \exists y \forall z((\forall t((t \in z) \Rightarrow (t \in x))) \Leftrightarrow (z \in y)).$$

7 - Il existe un ensemble dont l'ensemble vide est un élément et tel que si un second ensemble est un élément quelconque de cet ensemble alors la réunion de ce second ensemble et du singleton associé à ce second ensemble est un élément de cet ensemble. Ceci signifie qu'il existe un ensemble infini :

$$\exists E \forall x \exists y \forall z((\emptyset \in E) \wedge ((x \in E) \Rightarrow ((z \in y) \Leftrightarrow ((z \in x) \vee (z = x))))).$$

8 - Étant donné un ensemble et un prédicat $A(x, y)$ tel que pour tout élément a de l'ensemble donné il existe au plus un ensemble b tel que $A(a, b)$ soit vraie alors les ensembles b ainsi obtenus quand a décrit l'ensemble donné forment un ensemble appelé image de l'ensemble donné par A :

$$\begin{gathered}(\forall x \forall y \forall y'((A(x, y) \wedge (A(x, y')) \Rightarrow (y = y'))) \\ \Downarrow \\ (\forall X \exists Y \forall y((\exists x((x \in X) \wedge A(x, y))) \Leftrightarrow (y \in Y))).\end{gathered}$$

9 - Étant donné un ensemble non vide il existe un élément qui appartient à cet ensemble et qui ne possède aucun élément en commun avec l'ensemble donné. En particulier un ensemble n'est jamais élément de lui-même :

$$\forall x \exists y \forall z((x = \emptyset) \vee ((y \in x) \wedge ((z \in y) \Rightarrow (\neg(z \in x))))).$$

Soit y un ensemble non vide et x le singleton $x = \{y\}$. D'après l'axiome 9 si z est un élément de y ($z \in y$) alors z n'est pas y qui est l'unique élément de x : $(\neg(z = y))$. En particulier $(\neg(y \in y))$: un ensemble n'est jamais élément de lui même.
10 - Étant donné un ensemble dont tous les éléments sont des ensembles non vides il existe un ensemble qui a en commun avec chaque élément de l'ensemble donné un et un seul élément :

$$\forall x \left((\emptyset \in x) \vee \left(\exists y \forall t \left((t \in x) \Rightarrow \left(\exists z \forall u \left(\begin{array}{c} ((z \in t) \wedge (z \in y)) \\ \wedge \\ (((u \in t) \wedge (u \in y)) \Rightarrow (u = z)) \end{array} \right) \right) \right) \right) \right).$$

On peut choisir simultanément un élément dans chaque ensemble d'une famille d'ensembles non vides.

Ces règles sont les 9 axiomes de la théorie des ensembles de Zermelo et Fraenkel auxquels on a ajouté l'axiome du choix. L'axiome 2 nous garantit l'existence d'au moins un ensemble, l'ensemble vide. Les autres axiomes nous garantissent l'existence de nombreux ensembles. Les six premiers axiomes permettent de donner un sens en termes d'ensembles aux notions de couple, de produit cartésien, d'intersection, de réunion, de différence, de projection sur un des facteurs d'un sous-ensemble d'un produit cartésien. L'axiome 7 assure l'existence d'un ensemble infini et permet de construire les entiers naturels. Les axiomes 8, 9 et 10 sont plus difficiles à saisir. Le dernier, appelé axiome du choix a une importance importante dans toutes les branches des mathématiques.

Gödel montre qu'il existe des assertions dont on ne peut dire si elles sont vraies ou fausses en utilisant les 10 axiomes précédents et le langage de la théorie des ensembles. Il montre également que pour montrer qu'il n'existe pas d'assertions contradictoires dans la théorie des ensembles il faut raisonner dans une théorie plus forte que la théorie des ensembles.

3.2 Définition par compréhension, inclusion, intersection, réunion, différence, complémentaire, couple, produit cartésien, projection

Si X est un ensemble et A un prédicat $(\forall x \in X\ A)$ est synonyme de $(\forall x((x \in X) \Rightarrow A))$ et $(\exists x \in X\ A)$ est synonyme de $(\exists x((x \in X) \wedge A))$. Le prédicat $(\forall x \in X\ A)$ se lit “pour tout x dans X on a A” ou “si x dans X alors A”. Le prédicat $(\exists x \in X\ A)$ se lit “il existe x dans X tel que A”.

L'ensemble des parties Si X est un ensemble, l'ensemble des parties de X donné par l'axiome 6 est noté $\mathcal{P}(X)$ ou 2^X.

Inclusion Soit X et Y deux ensembles. On dit que Y est inclus dans X et on écrit $Y \subset X$ ou $X \supset Y$ si l'assertion

$$\forall x((x \in Y) \Rightarrow (x \in X))$$

est vraie. D'après le premier axiome $X = Y$ si $Y \subset X$ et $X \subset Y$. On note $Y \not\subset X$ la négation $(\neg(Y \subset X))$.

Définition par compréhension Soit X un ensemble et $A(x)$ un prédicat qui possède une variable libre. Alors le sous-ensemble

$$Y = \{x \in X : A(x)\}$$

de X défini par compréhension à partir du prédicat $A(x)$ (voir axiome 5) est caractérisé de la façon suivante

$$\forall x((x \in Y) \Leftrightarrow ((x \in X) \wedge A(x))).$$

Réunion Si X et Y sont deux ensembles alors la réunion $X \cup Y$ vérifie

$$\forall x(((x \in X) \vee (x \in Y)) \Leftrightarrow (x \in X \cup Y)).$$

Si I est un ensemble et $(X_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles indexée par I alors la réunion $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ donnée par le quatrième axiome vérifie

$$\forall x((\exists i((i \in I) \wedge (x \in X_i))) \Leftrightarrow (x \in X)).$$

Intersection Si X et Y sont deux ensembles alors l'intersection $X \cap Y$ vérifie

$$\forall x(((x \in X) \wedge (x \in Y)) \Leftrightarrow (x \in X \cap Y))).$$

Si I est un ensemble non vide et $(X_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles indexée par I alors l'intersection $X = \bigcap_{i\in I} X_i$ est l'ensemble

$$X = \{x \in X_{i_0} : \forall i((i \in I) \Rightarrow (x \in X_i))\}$$

où i_0 est un élément quelconque de I.

Différence et complémentaire Si X et Y sont deux ensembles alors la différence $X \setminus Y$ et le sous-ensemble de X défini par

$$X \setminus Y = \{x \in X : (\neg(x \in Y))\}.$$

Si $Y \subset X$ alors $X \setminus Y$ s'appelle le complémentaire de Y dans X.

Couple Soit x et y deux ensembles alors l'ensemble $\{x, \{x, y\}\}$ s'appelle le couple de premier terme x et de second terme y. Il est noté (x, y). Le couple (x, y) existe par l'axiome 3 : c'est la paire obtenue à partir de x et de la paire obtenue à partir de x et de y. Il est unique par l'axiome 1.

n-uplet Un n-uplet $(x_1, ..., x_n)$ peut être défini comme le couple formé du $n - 1$-uplet $(x_1, ..., x_{n-1})$ et de x_n. Il s'agit là d'une définition par récurrence. On convient d'identifier à $(x_1, .., x_n)$ tous les couples de la forme $((x_1, ..., x_k), (x_{k+1}, ..., x_n))$ avec $k \in \{1, ..., n - 1\}$.

Produit cartésien Soit X et Y deux ensembles. Le produit cartésien $X \times Y$ est le sous-ensemble de $\mathcal{P}(X \cup Y)$ défini par

$$X \times Y = \{z \in \mathcal{P}(X \cup Y) : (\exists x \exists y(((x \in X) \wedge (y \in Y)) \wedge (z = (x, y)))))\}.$$

C'est l'ensemble des couples (x, y) avec $x \in X$ et $y \in Y$.

Produit cartésien de plusieurs ensembles Si $X_1, ..., X_n$ sont des ensembles alors le produit $X_1 \times ... \times X_n$ aussi noté $\prod_{i=1}^{n}$ est le produit cartésien de $X_1 \times ... \times X_{n-1}$ avec X_n. Il s'agit là d'une définition par récurrence. On convient d'identifier à $X_1 \times X_n$ tous les produits cartésiens de la forme $(X_1 \times ... \times x_k), (X_{k+1} \times ... \times X_n))$ avec $k \in \{1, ..., n - 1\}$. Les Le produit cartésien $X_1 \times ... \times X_n$ est l'ensemble des n-uplets $(x_1, ..., x_n)$ avec $x_k \in X_k$ pour chaque $k \in \{1, ..., n\}$.

Projection Soit X et Y deux ensembles et Z un sous-ensemble du produit cartésien $X \times Y$. Alors la projection de Z sur X parallèlement à Y est le sous-ensemble de $\pi_X(Z)$ défini par

$$\pi_X(Z) = \{x \in X : \exists y((x, y) \in Z\}.$$

C'est l'ensemble des éléments x de X pour les quels il existe au moins un $y \in Y$ tel que le couple (x, y) soit dans Z. On définit de façon analogue la projection de Z sur Y parallèlement à X en posant

$$\pi_Y(Z) = \{y \in Y : \exists x((x, y) \in Z\}.$$

Soit X, Y, Z et T quatre ensembles et A et B des prédicats avec une variable libre. Alors
- $(X \cap Y) \subset X$, $(X \cap Y) \subset Y$,

- $X \cap X = X$, $X \cap Y = Y \cap X$, $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$,
- $X \subset (X \cup Y)$, $Y \subset (X \cup Y)$,
- $X \cup X = X$, $X \cup Y = Y \cup X$, $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$,
- $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Y)$, $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Y)$,
- si $Z \subset Y$ et $Y \subset X$ alors $Z \subset X$,
- si $Y \subset X$ alors $X = Y \cup (X \setminus Y)$, $\emptyset = Y \cap (X \setminus Y)$, $Y = X \setminus (X \setminus Y)$,
- si $Y = \{x \in X : A(x)\}$ et $Z = \{x \in X : B(x)\}$ alors

$$\begin{array}{rcl} X \setminus Y &=& \{x \in X : (\neg A(x))\}, \\ Y \cap Z &=& \{x \in X : (A(x) \wedge B(x))\}, \\ Y \cup Z &=& \{x \in X : (A(x) \vee B(x))\}, \end{array}$$

- si Z et T sont des sous-ensembles de $X \times Y$ alors

$$\pi_X(Z \cup T) = \pi_X(Z) \cup \pi_X(T), \quad \pi_X(Z \cap T) \subset \pi_X(Z) \cap \pi_X(T)$$

et si de plus $Z \subset T$ alors $\pi_X(Z) \subset \pi_X(T)$.

Soit I un ensemble non vide, Y un ensemble et $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles. Alors

$$\begin{array}{rcl} \left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) \cap Y &=& \bigcup_{i \in I} (X_i \cap Y), \\ \left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) \cup Y &=& \bigcap_{i \in I} (X_i \cup Y). \end{array}$$

Si $\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) \subset Y$ alors

$$\begin{array}{rcl} Y \setminus \left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) &=& \bigcap_{i \in I} (Y \setminus X_i), \\ Y \setminus \left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) &=& \bigcup_{i \in I} (Y \setminus X_i). \end{array}$$

Soit Iet J des ensembles non vides, soit $(I_j)_{j \in J}$ une famille de sous-ensembles non vides de I dont la réunion est I et $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles. Alors

$$\bigcup_{i \in I} X_i = \bigcup_{j \in J} \left(\bigcup_{i \in I_j} X_i\right) \text{ et } \bigcap_{i \in I} X_i = \bigcap_{j \in J} \left(\bigcap_{i \in I_j} X_i\right).$$

Soit X et Y des ensembles, I un ensemble non vide et $(Z_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles de $X \times Y$ alors

$$\pi_X \left(\bigcup_{i \in I} Z_i\right) = \left(\bigcup_{i \in I} \pi_X(Z_i)\right), \pi_X \left(\bigcap_{i \in I} Z_i\right) \subset \left(\bigcap_{i \in I} \pi_X(Z_i)\right)$$

et

$$\pi_Y \left(\bigcup_{i \in I} Z_i\right) = \left(\bigcup_{i \in I} \pi_Y(Z_i)\right), \pi_Y \left(\bigcap_{i \in I} Z_i\right) \subset \left(\bigcap_{i \in I} \pi_Y(Z_i)\right).$$

4 Applications

4.1 Fonctions, applications et graphes

4.1.1 Fonction

Une fonction est un triplet $f = (E, F, \mathcal{G})$ où E et F sont des ensembles et $\mathcal{G}$ un sous-ensemble de $E \times F$ tel que si $x \in E$ alors il existe au plus un $y \in F$ et noté $f(x)$ tel que $(x, y) \in \mathcal{G}$. La fonction f est souvent notée $f : E \to F$. L'ensemble $\mathcal{G}$ s'appelle le graphe de f.

4.1.2 Application

Une application est un triplet $f = (E, F, \mathcal{G})$ où E et F sont des ensembles et $\mathcal{G}$ un sous-ensemble de $E \times F$ tel que si $x \in E$ alors il existe un et un seul $y \in F$ et noté $f(x)$ tel que $(x, y) \in \mathcal{G}$. L'application f est souvent notée $f : E \to F$. L'ensemble E s'appelle le domaine ou l'ensemble de départ de f, l'ensemble F s'appelle l'ensemble d'arrivée et l'ensemble $\mathcal{G}$ s'appelle le graphe de f.

Soit $f : E \to F$ et $f' : E \to F$ deux applications. Si pour tout $x \in E$ on a $f(x) = f'(x)$ alors $f = f'$.

Si E et F sont deux ensembles, il existe un ensemble noté E^F dont les éléments sont les applications de E dans F.

Si F est un ensemble alors $\emptyset^F = \{(\emptyset, F, \emptyset)\}$. Si E est un ensemble non vide alors $E^\emptyset = \emptyset$.

4.1.3 Image, image réciproque, antécédent

Si $(x, y) \in \mathcal{G}$ alors y est appelée image de x par f ou valeur de f en x et x est appelé antécédent de y par f. Si $X \subset E$ Le sous-ensemble des éléments de F qui sont des images d'éléments de X par f s'appelle l'image de X par f et il est noté $f(X)$. L'ensemble $f(E)$ s'appelle ensemble des valeurs de f ou l'image de f. Si $Y \subset F$ le sous-ensemble des éléments de E qui sont les antécédents des éléments de Y par f s'appelle l'image réciproque de Y par f et il est noté $f^{-1}(Y)$.

4.1.4 Deux exemples : l'application identité et les applications constantes

Si E est un ensemble alors l'ensemble $\mathcal{I}_E = \{(x, x) : x \in E\}$ est le graphe d'une application de Id_E de E dans E appelée identité de E : si $x \in E$ alors $Id_E(x) = x$.

Soit E et F deux ensembles. Soit $y \in F$. On appelle application constante y l'application f de E dans F définie par $f(x) = y$ si $x \in E$. Son graphe est l'ensemble $\{(x, y) : x \in E\}$.

4.2 Restriction, prolongement, corestriction, coprolongement

Soit $E \subset E'$, $f : E \to F$ et $f' : E' \to F$. On dit que f est une restriction de f' à E ou que f' est un prolongement de f à E' si pour tout $x \in E$ on a $f(x) = f'(x)$.

Soit $E \subset E'$ et $f : E \to F$. Alors il existe un prolongement f' de f à E'.

Soit $E \subset E'$ et $f' : E' \to F$. Alors il existe une et une seule restriction de f' à f.

Soit $F \subset F'$, $f : E \to F$ et $f' : E \to F'$. On dit que f est une corestriction de f' à F ou que f' est un coprolongement de f à F' si pour tout $x \in E$ on a $f(x) = f'(x)$.

Soit $F \subset F'$ et $f : E \to F$. Alors il existe un et un seul coprolongement f' de f à F'. Les graphes de f et f' sont égaux et $f'(E) = f(E)$.

Soit $F \subset F'$ et $f' : E \to F'$ telle que $f'(E) \subset F$. Alors il existe une unique corestriction f de f' à F. Les graphes de f et f' sont égaux et $f'(E) = f(E)$.

4.3 Composition

Soit $f : E \to F$ et $g : F' \to H$ deux applications de graphes $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$. Si $F \subset F'$ alors l'ensemble

$$\mathcal{H} = \{(x, z) \in E \times H : \exists y \in F\ (x, y) \in \mathcal{F} \text{ et } (y, z) \in \mathcal{G}\}$$

est le graphe d'une application h de domaine E et d'ensemble d'arrivée H. Si $x \in E$ alors $(x, g(f(x))) \in \mathcal{H}$. En d'autres termes, si $x \in E$, $h(x) = g(f(x))$.

Soit $f : E \to F$ et $g : F' \to H$ deux applications de graphes $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$. Si $F \subset F'$ l'application dont le graphe est l'ensemble

$$\mathcal{H} = \{(x, z) \in E \times H : \exists y \in F\ (x, y) \in \mathcal{F} \text{ et } (y, z) \in \mathcal{G}\}$$

est appelée composée de f suivie de g et est notée $g \circ f$ (lire g rond f). On a $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ si $x \in E$.

Si $f : E \to F$ alors $f = Id_F \circ f = f \circ Id_E$.

Soit E, F, F' et G quatre ensembles tels que $F \subset F'$. Alors l'ensemble

$$\mathcal{H} = \{(f, g, h) \in E^F \times F'^G \times E^G : \forall x \in E, h(x) = g(f(x))\}$$

est le graphe d'une application de $E^F \times F'^G$ dans E^G appelée composée. Si $(f, g, h) \in \mathcal{H}$ alors $h = g \circ f$.

Si $f : E \to F$, $g : F' \to H$, $h : H' \to K$ telles que $F \subset F'$ et $H \subset H'$ alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

4.4 Injection, surjection, bijection

Soit $f : E \to F$ une application. Elle est dite injective si deux éléments distincts quelconques de E ont toujours des images distinctes, c'est à dire si pour tout $y \in F$ l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ est vide ou un singleton. Elle est dite surjective si tout élément de F admet au moins un antécédent, c'est à dire si $f(E) = F$. Elle est dite bijective si elle est à la fois injective et surjective. Une injection est une application injective, une surjection est une application surjective et une bijection est une application bijective.

Soit F un ensemble. La seule application de $\emptyset$ dans F est $(\emptyset, F, \emptyset)$ qui est clairement injective. Elle est surjective donc bijective si et seulement si $F = \emptyset$.

Si E est un ensemble alors Id_E est une bijection.

La restriction, la corestriction ou le coprolongement d'une injection sont injectifs.

Si $E \subset F$ le coprolongement de Id_E à F est une injection appelée injection canonique ou inclusion de E dans F.

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective. Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective. Si $g \circ f$ est injective alors f est injective. Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

4.5 Réciproque ou inverse pour la composition

Soit $f : E \to F$ une application. Une application $g : F \to E$ est appelée réciproque de f ou inverse de f pour la composition si pour $x \in E$ et $y \in F$ on a $g(f(x)) = x$ et $f(g(y)) = y$.

Si g est une réciproque de f alors f est une réciproque de g.

Si $g : F \to E$ et $g' : F \to E$ sont deux réciproques d'une application $f : E \to F$ alors $g = g'$.

Une application $f : E \to F$ possède une réciproque si et seulement si f est bijective.

Si $f : E \to F$ admet une réciproque alors cette réciproque, qui est unique est noté f^{-1}.

La réciproque f^{-1} d'une bijection est également une bijection.

D'après ce qui précède, s'il existe une bijection d'un premier ensemble dans un second, il existe aussi une bijection du second dans le premier. C'est pourquoi on dit que deux ensembles sont en bijection s'il existe une bijection de l'un dans l'autre.

Soit $f : E \to F$ une bijection et $g : F \to E$. Si pour tout $x \in E$ on a $g(f(x)) = x$ alors g est la réciproque de f. Si pour tout $y \in F$ on a $f(g(y)) = y$ alors g est la réciproque de f.

Soit $f : E \to F$ une application et $\mathcal{G}$ son graphe. Alors E et $\mathcal{G}$ sont en bijection : l'application qui à $x \in E$ associe $(x, f(x)) \in \mathcal{G}$ est une bijection.

Soit $f : E \to F$ et $g, h : F \to E$ telles que si $x \in E$ et $y \in F$ alors $g(f(x)) = x$ et $f(h(y)) = y$. Alors f est bijective et $f^{-1} = g = h$.

Soit E un ensemble et $f \in E^E$. On dit que f est une involution si $f \circ f = Id_E$, c'est à dire si f est son propre inverse.

Soit E un ensemble et $a, b \in E$. La transposition de a et b est l'application σ_{ab}^E définie par $\sigma_{ab}^E(a) = b$, $\sigma_{ab}^E(b) = a$ et $\sigma_{ab}^E(x) = x$ si $x \in E \setminus \{a, b\}$.

Soit E un ensemble et $a, b \in E$. La transposition σ_{ab}^E est l'identité si et seulement si $a = b$.

Les transpositions sont des involutions.

Une transposition est une bijection puisque elle possède un inverse, elle même.

Soit $f : E \to F$. Si f est injective alors il existe une surjection $g : F \to E$ telle que si $x \in E$ alors $g(f(x)) = x$. Si f est surjective alors il existe une injection $g : F \to E$ telle que si $y \in F$ alors $f(g(y)) = y$.

Soit $f : E \to F$ de graphe $\mathcal{F}$ et $g : E \to G$ de graphe $\mathcal{G}$. Alors l'ensemble

$$\mathcal{H} = \{(x, y, z) \in E \times F \times G : (x, y) \in \mathcal{F}, (x, z) \in \mathcal{G}\}$$

est le graphe d'une application $h : E \to F \times G$ telle que si $x \in E$ alors $h(x) = (f(x), g(x))$.

Soit $f : E \to F$ de graphe $\mathcal{F}$ et $g : E \to G$ de graphe $\mathcal{G}$ deux applications définies sur le même ensemble de départ. Alors l'application de graphe

$$\mathcal{H} = \{(x, y, z) \in E \times F \times G : (x, y) \in \mathcal{F}, (x, z) \in \mathcal{G}\}$$

est notée (f, g). Si $x \in E$ alors $(f, g)(x) = (f(x), g(x))$.

Soit $f : E \to F$ de graphe $\mathcal{F}$ et $f' : E' \to F'$ de graphe $\mathcal{F}'$ deux applications. Alors l'ensemble

$$\mathcal{H} = \{(x, x'), (y, y') \in (E \times E') \times (F \times F') : (x, y) \in \mathcal{F}, (x', y') \in \mathcal{F}\}$$

est le graphe d'une application $h : E \times E' \to F \times F'$ telle que si $(x, x') \in E \times E'$ $h(x, x') = (f(x), f'(x'))$.

Soit $f : E \to F$ de graphe $\mathcal{F}$ et $f' : E' \to F'$ de graphe $\mathcal{F}'$ deux applications et soit $h : E \times E' \to F \times F'$ l'application de

$$\mathcal{H} = \{(x, x'), (y, y') \in (E \times E') \times (F \times F') : (x, y) \in \mathcal{F}, (x', y') \in \mathcal{F}\}.$$

L'application h est injective si et seulement si f et et f' le sont. Elle est surjective si et seulement f et f' le sont.

Soit $f : E \to F$ de graphe $\mathcal{F}$ et $f' : E' \to F'$ de graphe $\mathcal{F}'$ deux applications. On suppose que $E \cap E' = \emptyset$. Alors $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$ est le graphe d'une application $g : E \cup E' \to F \cup F'$ telle que $g(x) = f(x)$ si $x \in E$ et $g(x) = f'(x')$. On a $g(E \cup E') = f(E) \cup f'(E')$. Si f et f' sont des bijections et $F \cap F' = \emptyset$ alors g est une bijection.

5 Indices

5.1 Famille indexée

Un famille indexée est la donnée d'un ensemble I appelé ensemble d'indices et d'une application ϕ de I dans un ensemble E qui permet d'indexer des éléments de E. On note x_i l'élément de E qui est l'image de i par l'application ϕ. On note $(x_i)_{i\in I}$ la famille de E indexée par I (via ϕ).

Souvent I est un sous-ensemble de $\mathbf{N}$ ou de $\mathbf{Z}$ ou encore de $\mathbf{N}^n$ ou de $\mathbf{Z}^n$.

5.2 Action d'une loi sur une famille indexée

On considère un ensemble E muni d'une loi de composition interne, c'est à dire d'une application $*$ de $E\times E$ dans E. On suppose que cette loi $*$ est associative, c'est à dire que si $x,y,z\in E$ alors $x*(y*z)=(x*y)*z$. Alors si $(x_i)_{i\in\mathbf{N}}$ est une famille indexée de E alors on définit par récurrence $\underset{i=1}{\overset{n}{*}} x_i$ si $n\in\mathbf{N}^*$ de la façon suivante : $\underset{i=1}{\overset{1}{*}} x_i = x_1$ et si $n>1$

$$\underset{i=1}{\overset{n}{*}} x_i = \left(\underset{i=1}{\overset{n-1}{*}} x_i\right) * x_n.$$

On suppose que $*$ est de plus commutative, c'est à dire que si $x,y\in E$ alors $x*y=y*x$. Alors l'ordre importe peu quand on fait agir $*$ et on peut définir de façon analogue $\underset{i\in I}{*} x_i$ si $\mathcal{F}=(x_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de E indexée par un ensemble fini et non vide I :

$$\underset{i\in I}{*} x_i = \underset{k=1}{\overset{n}{*}} x_{i_k}$$

où l'application $k\in\{1,...,n\}\mapsto i_k\in I$ est une bijection qui permet d'ordonner I (on indexe la famille d'indices I par les entiers $\{1,...,n\}$). Cette définition ne dépend pas de la façon d'ordonner I.

5.3 Les symboles $\sum$ et $\prod$

5.3.1 Le symbole $\sum$

Si la loi est notée $+$ et qu'elle est associative et commutative (comme l'addition dans $\mathbf{R}$) on pose $\underset{i\in I}{+} x_i = \sum_{i\in I} x_i$ et $\underset{i=1}{\overset{n}{+}} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

Si l'ensemble d'indices I est de la forme $I=K\times L$ alors on a

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{(k,l)\in K\times L} x_{kl} = \sum_{k\in K}\left(\sum_{l\in L} x_{kl}\right) = \sum_{l\in L}\left(\sum_{k\in K} x_{kl}\right).$$

On peut montrer par récurrence sur n

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ et } \sum_{k=1}^{n} x^k = x\frac{1-x^n}{1-x} \text{ si } x\in\mathbf{R}\setminus\{1\}.$$

5.3.2 Le symbole $\prod$

Si la loi est notée $\times$ et qu'elle est associative et commutative (comme la multiplication dans $\mathbf{R}$) on pose $\underset{i\in I}{\times} x_i = \prod_{i\in I} x_i$ et $\underset{i=1}{\overset{n}{\times}} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

Si l'ensemble d'indices I est de la forme $I = K \times L$ alors on a

$$\prod_{i \in I} x_i = \prod_{(k,l) \in K \times L} x_{kl} = \prod_{k \in K} \left(\prod_{l \in L} x_{kl} \right) = \prod_{l \in L} \left(\prod_{k \in K} x_{kl} \right).$$

5.3.3 Lorsque E est muni des deux lois $+$ et $\times$

On suppose que E est muni de deux lois $+$ et $\times$, toutes les deux associatives et commutatives. On suppose aussi que $\times$ est distributive par rapport à $+$. Ceci signifie que si $x, y, z \in E$ alors $x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$ et $(x + y) \times z = (x \times z) + (y \times z)$.

Dans ce cas, si $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est une suite d'éléments de E alors :

$$\begin{array}{ll} \text{si } n = 1, & \displaystyle\sum_{i=1}^{1} x_i = x_1 \text{ et } \prod_{i=1}^{1} x_i = x_1; \\ \text{si } n \in \mathbf{N} \text{ et } n > 1, & \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} x_i = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) + x_{n+1} \text{ et } \prod_{i=1}^{n+1} x_i = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right) \times x_{n+1}. \end{array}$$

Si $x \in E$ alors x^n désigne $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} x$.

Si $x \in E$ et si $n \in \mathbf{N}^*$ alors $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} x^i = x^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Table des matières

Université de Rennes 1
UFR Mathématiques
2022-2023

Parcours d'Accès Spécifique Santé (PASS)
Option Mathématiques

Compléments maths PASS 3 (CMP3)

Complexes. Techniques de calcul en analyse (dont primitives)

Version provisoire du 3 janvier 2023

Programme

Nombres complexes Définition de l'ensemble des nombres complexes. Parties réelle et imaginaire. Module. Argument. Équations du second degré à coefficients complexes. Racines énièmes. Exponentielle complexe et applications à la trigonométrie.

Fonctions réelles (techniques fondamentales de calcul en analyse) Fonctions classiques : polynômes (et leur division euclidienne), fractions rationnelles, logarithme, exponentielle, fonctions trigonométriques et trigonométriques hyperboliques. Composition de fonctions. Continuité et opérations algébriques Dérivation en un point. Dérivation et opérations avec composition et inverse. Application à l'étude du sens de variation d'une fonction. Fonctions de 2 ou 3 variables. Définition, composition, dérivées partielles.

Primitives et intégrales Quelques primitives classiques. Intégration par parties. Changement de variable. Linéarité de l'intégration. Lien entre intégrale et primitive. Application à la définition du logarithme et de l'exponentielle.

Remarque 1

Ce polycopié est directement inspiré des notes de cours des modules "A01" et "AN1" rédigées entre 2006 et 2008 par les équipes pédagogiques de l'UFR Mathématiques.

Remarque 2

Les résultats exposés dans ce cours sont généralement admis. En revanche on expliquera comment les utiliser. L'objet du cours est de permettre à la personne qui le suit de confirmer et renforcer sa pratique de l'utilisation des premiers outils de l'analyse réelle et complexe.

Première partie

Les nombres complexes

1 Construction du corps des complexes, C

Définition 1.1 On note $\mathbf{C}$ et on appelle **corps des complexes** l'ensemble des couples de réels muni des trois lois suivantes : si (x,y) et (x',y') sont dans $\mathbf{C}$ et λ dans $\mathbf{R}$

— **addition**
$$(x,y) +_{\mathbf{C}} (x',y') = (x+x', y+y')$$

— **multiplication**
$$(x,y) \times_{\mathbf{C}} (x',y') = (xx'-yy', xy'+x'y)$$

— **multiplication par un réel**
$$\lambda \cdot (x,y) = (\lambda x, \lambda y)$$

Les éléments de $\mathbf{C}$ s'appellent **nombres complexes** ou **complexes**.

Notations 1.1 Le complexe $(0,0)$ est noté $0_{\mathbf{C}}$, le complexe $(1,0)$ est noté $1_{\mathbf{C}}$ et le complexe $(0,1)$ est noté i.

Proposition 1.1 *Soient $z=(x,y), z'=(x',y'), z''=(x'',y'')$ des complexes et λ, λ' des réels. Ils vérifient les proriétés suivantes.*

— $0_{\mathbf{C}} +_{\mathbf{C}} z = z +_{\mathbf{C}} 0_{\mathbf{C}} = z$ *($0_{\mathbf{C}}$ neutre pour $+_{\mathbf{C}}$)*
— $z +_{\mathbf{C}} (-x,-y) = (-x,-y) +_{\mathbf{C}} z = 0_{\mathbf{C}}$ *(tout élément admet un inverse pour $+_{\mathbf{C}}$)*
— $z +_{\mathbf{C}} (z' +_{\mathbf{C}} z'') = (z +_{\mathbf{C}} z') +_{\mathbf{C}} z''$ *($+_{\mathbf{C}}$ est associative)*
— $z +_{\mathbf{C}} z' = z' +_{\mathbf{C}} z$ *($+_{\mathbf{C}}$ est commutative)*

$(\mathbf{C}, +_{\mathbf{C}})$ *est un* **groupe commutatif**

— $\lambda \cdot (z+z') = \lambda \cdot z +_{\mathbf{C}} \lambda \cdot z'$
— $(\lambda+\lambda') \cdot z = \lambda \cdot z +_{\mathbf{C}} \lambda' \cdot z$
— $(\lambda\lambda') \cdot z = \lambda \cdot (\lambda' \cdot z)$

$(\mathbf{C}, +_{\mathbf{C}}, \cdot)$ *est un* **R-espace vectoriel**

— $1_{\mathbf{C}} \times_{\mathbf{C}} z = z \times_{\mathbf{C}} 1_{\mathbf{C}} = z_{\mathbf{C}}$ *($1_{\mathbf{C}}$ neutre pour $\times_{\mathbf{C}}$)*
— *Si $z \neq 0_{\mathbf{C}}$ alors $z \times_{\mathbf{C}} (\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}) = (\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}) \times_{\mathbf{C}} z = 1_{\mathbf{C}}$ (tout élément différent de $0_{\mathbf{C}}$ admet un inverse pour $\times_{\mathbf{C}}$)*
— $z \times_{\mathbf{C}} (z \times_{\mathbf{C}} z'') = (z \times_{\mathbf{C}} z') \times_{\mathbf{C}} z''$ *($\times_{\mathbf{C}}$ est associative)*
— $z \times_{\mathbf{C}} (z' +_{\mathbf{C}} z'') = (z \times_{\mathbf{C}} z') +_{\mathbf{C}} (z \times_{\mathbf{C}} z'')$ *($\times_{\mathbf{C}}$ est distributive par rapport à $+_{\mathbf{C}}$)*
— $z \times_{\mathbf{C}} z' = z' \times_{\mathbf{C}} z$ *($\times_{\mathbf{C}}$ est commutative)*

$(\mathbf{C} \setminus \{0\}, \times_{\mathbf{C}})$ *est un* **groupe commutatif** *et* $(\mathbf{C}, +_{\mathbf{C}}, \times_{\mathbf{C}})$ *est un* **corps commutatif**

— $\lambda \cdot z = (\lambda, 0) \times_{\mathbf{C}} z$

*Ceci permet d'***identifier** *les réels et les complexes de la forme $(x,0)$.*

Convention L'identification des réels avec les complexes de la forme $(x,0)$ conduit à identifier 0 et $0_{\mathbf{C}}$ ainsi que 1 et $1_{\mathbf{C}}$. Dans la suite on notera $+_{\mathbf{C}}$ et $\times_{\mathbf{C}}$ simplement $+$ et $\times$ et on adoptera pour les complexes les mêmes règles d'écriture des opérations et des parenthèses que pour les réels.

Notations 1.2 Soit $z=(x,y)$.

— On pose $-z=(-x,-y)$. C'est l'**opposé de** z, c'est à dire l'**inverse** pour $+$.
— Si $z \neq 0$ on pose $z^{-1} = \frac{1}{z} = (\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2})$. C'est l'**inverse de** z, c'est à dire l'**inverse** pour $\times$.

Définition 1.2 Si $z = (x, y)$ on appelle **partie réelle de** z et on note $\mathrm{Re}(z)$ le nombre x et on appelle **partie imaginaire de** z et on note $\mathrm{Im}(z)$ le nombre y.

Notation 1.3 Le complexe $z = (x, y)$ s'écrit aussi de manière unique $z = x + iy = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z)$ avec $x \in \mathbf{R}$ et $y \in \mathbf{R}$. Ceci signifie que le couple $\{1, i\}$ est **une base** du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{C}$ qui est de **dimension** 2.

Définition 1.3 Un complexe z est dit **imaginaire pur** si sa partie réelle est 0. L'ensemble des imaginaires purs est $i\mathbf{R}$ et on a $\mathbf{C} = \mathbf{R} + i\mathbf{R}$.

Proposition 1.2

$$i^2 = -1$$

Ainsi, alors que l'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbf{R}$ elle en possède deux dans $\mathbf{C}$ qui sont i et $-i$.

Proposition 1.3 *Soient $z \in \mathbf{C} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbf{N}$. Alors*

$$\sum_{n=0}^{n-1} z^k = 1 + ... + z^k + ...z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}.$$

Proposition 1.4 *Soient $a, b \in \mathbf{C}$ et $n \in \mathbf{N}$. Alors*

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k}.$$

2 Conjugué, module et argument d'un nombre complexe

Définition 2.1 On appelle **conjugué du nombre complexe** $z = x + iy$ (avec $x \in \mathbf{R}$ et $y \in \mathbf{R}$) et on note $\overline{z}$ le nombre complexe $\overline{z} = x - iy$.

Proposition 2.1 *Soient $z, z' \in \mathbf{C}$.*
- $\overline{\overline{z}} = z$ *(la conjugaison est une* **involution***)*
- $\overline{-z} = -\overline{z}$
- $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\overline{z}}$ *si* $z \neq 0$
- $z\overline{z} = \mathrm{Re}^2(z) + \mathrm{Im}^2(z)$
- $\overline{z} = z$ *si et seulement si* z *est réel*
- $\overline{z} = -z$ *si et seulement si* z *est imaginaire pur*
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$

Définition 2.2 On appelle **module de** z et on note $|z|$ la racine carrée de $z\overline{z} = \mathrm{Re}^2(z) + \mathrm{Im}^2(z)$.

Proposition 2.2 *Si $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ alors* $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Proposition 2.3 *Soient $z, z' \in \mathbf{C}$ et $\lambda \in \mathbf{R}$.*
- $|z| = 0$ *si et seulement si* $z = 0$
- $|z| = |-z|$
- $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$ *si* $z \neq 0$
- $||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$ *(***inégalité triangulaire** *)*
- $|\lambda z| = |\lambda||z|$

— $|zz'| = |z||z'|$

Ainsi le module est une **norme**.

On déduit de cette proposition le résultat suivant.

Proposition 2.4 *Les ensembles* $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ *et* $S = \{z \in \mathbf{C}, |z| = 1\}$ *munis de la multiplication sont des groupes commutatifs : ils contiennent le neutre pour la multiplication,* 1, *et si* $z, z', z'' \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ *(respectivement* $z, z', z'' \in S$*) alors* $zz' = z'z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ *(respectivement* $zz' = z'z \in S$*),* $\frac{1}{z} \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ *(respectivement* $\frac{1}{z} \in S$*) et* $z(z'z'') = (zz')z''$.

Définition 2.3 L'ensemble $S = \{z \in \mathbf{C}, |z| = 1\}$ s'appelle le **cercle unité**.

Définition 2.4 Soit $z \neq 0$. Puisque $\frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} + i\frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|} = \frac{z}{|z|}$ est de module 1 il existe un θ dans $\mathbf{R}$ tel que $\cos(\theta) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}$ et $\sin(\theta) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$. Ce nombre θ est un **argument** de z. Les nombres r et θ associés à z s'appellent **coordonnées polaires de** z.

Proposition 2.5 *Soit* $z \neq 0$ *et* θ *un argument de* z. *Alors les arguments de* z *sont les réels de la forme* $\theta + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Proposition 2.6 *Tout complexe non nul* z *est déterminé par son module* r *et un de ses arguments* θ : $z = r(cos(\theta) + i\sin(\theta))$.

Proposition 2.7 *Si* z *et* z' *sont deux complexes non nuls de modules* r *et* r' *et d'arguments* θ *et* θ' *alors* zz' *est de module* rr' *et d'argument* $\theta + \theta'$:

$$[r(cos(\theta) + i\sin(\theta))][r'(cos(\theta') + i\sin(\theta'))] = (rr')(cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')).$$

3 Les racines d'un polynôme d'ordre 2 à coefficients complexes

Proposition 3.1 *Soient* $a, b, c \in \mathbf{C}$ *avec* $a \neq 0$. *On note* δ *une racine carrée de* $\Delta = b^2 - 4ac$. *Alors*

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \quad \textbf{et} \quad z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$$

sont les solutions de l'équation

$$az^2 + bz + c = 0.$$

Proposition 3.2 *Soit* $\Delta = X + iY$ *un complexe non nul. L'équation* $\delta^2 = \Delta$ *posède exactement deux solutions* $\delta_1 = x + iy$ *et* $\delta_2 = -\delta_1$. *On a* $x^2 + y^2 = \sqrt{X^2 + Y^2}$, $x^2 - y^2 = X$ *et* $2xy = Y$. *Par conséquent* x^2 *et* $-y^2$ *sont solution de l'équation*

$$Z^2 - XZ - \frac{Y^2}{4} = 0.$$

On a

$$x^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{X^2 + Y^2} + X), \quad y^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{X^2 + Y^2} - X).$$

De plus x *et* y *sont de même signe si* $Y \geq 0$ *et ils sont de signes opposés si* $Y < 0$.

4 Exponentielle complexe

Définition 4.1 L'**exponentielle complexe** est l'application de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ qui à $z = x + iy$ associe le complexe $\exp(z) = e^z$ de module $\exp(x) = e^x$ et d'argument y :

$$\exp(z) = \exp(x + iy) = \exp(x)(\cos(y) + i\sin(y))$$

qu'on écrit aussi

$$e^z = e^x(\cos(y) + i\sin(y)).$$

Cette application prolonge à $\mathbf{C}$ l'exponentielle définie sur $\mathbf{R}$.

Proposition 4.1 *Si $z = x + iy$ alors*

$$\exp(z) = \exp(x)\exp(iy)$$

qu'on écrit aussi

$$e^{(x+iy)} = e^x e^{iy}.$$

En particulier

$$\cos(y) + i\sin(y) = \exp(iy) = e^{iy}.$$

Proposition 4.2 *Si a et $b \in \mathbf{C}$, la fonctoin de la variable réelle définie par $t \mapsto b\exp(at)$ est dérivable (ceci signifie que ses deux fonctions coordonnées sont dérivables) et sa dérivée est la fonction $t \in \mathbf{R} \mapsto ab\exp(at)$.*

Proposition 4.3 *(***Identité d'Euler***)*

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Proposition 4.4 *L'exponentielle est une surjection de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C} \setminus \{0\}$. Plus précisément si $Z = X + iY \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ alors les antécédents de Z par l'exponentielle complexe sont les complexes de la forme $z = x + iy$ avec $x = \ln(|Z|)$ et $y = \theta + 2k\pi$ où θ est un argument de Z et k un entier relatif.*

Proposition 4.5 *Si $z, z' \in \mathbf{C}$ alors*

$$\exp(z + z') = \exp(z)\exp(z')$$

qu'on écrit aussi

$$e^{(z+z')} = e^z e^{z'}.$$

Proposition 4.6 *Si $t \in \mathbf{R}$ alors*

$$\begin{aligned}
\cos(t) &= \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} &&= \cosh(it) \\
\sin(t) &= \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} &&= \frac{\sinh(it)}{i} \\
\tan(t) &= \frac{e^{it} - e^{-it}}{i(e^{it} + e^{-it})} &&= \frac{\tanh(it)}{i}.
\end{aligned}$$

Proposition 4.7 Linéarisation *Si $n \in \mathbf{N}$ alors*

$$\begin{aligned}
\cos^n(t) &= \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{2^n}e^{i(2k-n)t} \\
& &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{2^n}\cos\left((2k-n)t\right) \\
\sin^n(t) &= \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{2^n}e^{i(2k-n)(t-\frac{\pi}{2})} \\
& &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{2^n}\cos\left((2k-n)(t-\frac{\pi}{2})\right).
\end{aligned}$$

Exemple 4.1

$$\begin{aligned}
\cos^3(t) &= \frac{1}{2^3}\cos(-3t)+\frac{3}{2^3}\cos(-t)+\frac{3}{2^3}\cos(t)+\frac{1}{2^3}\cos(3t) \\
&= \frac{1}{4}\cos(3t)+\frac{3}{4}\cos(t) \\
\sin^3(t) &= \frac{1}{2^3}\cos(-3(t-\frac{\pi}{2}))+\frac{3}{2^3}\cos(-(t-\frac{\pi}{2}))+\frac{3}{2^3}\cos(t-\frac{\pi}{2})+\frac{1}{2^3}\cos(3(t-\frac{\pi}{2})) \\
&= -\frac{1}{4}\sin(3t)+\frac{3}{4}\sin(t).
\end{aligned}$$

Proposition 4.8 *(***Formule de Moivre***) Si $t \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$ alors*

$$\cos(nt)+i\sin(nt) = (\cos(t)+i\sin(t))^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\cos^k(t)\sin^{n-k}(t)i^{n-k}.$$

Exemple 4.2 La formule de Moivre permet de calculer rapidement $\cos(3t)$ et $\sin(3t)$. On a

$$\cos(3t)+i\sin(3t) = \cos^3(t)+3i\cos^2(t)\sin(t)-3\cos(t)\sin^2(t)-i\sin^3(t)$$

et en séparant les parties réelles et imaginaires on trouve

$$\cos(3t) = \cos^3(t)-3\cos(t)\sin^2(t),\ \sin(3t) = 3\cos^2(t)\sin(t)-\sin^3(t)$$

puis en utilisant l'identité $\cos^2+\sin^2 = 1$ on obtient

$$\cos(3t) = 4\cos^3(t)-3\cos(t),\ \sin(3t) = 3\sin(t)-4\sin^3(t) = 4\cos^2(t)\sin(t)-\sin(t).$$

Proposition 4.9 *Soit $z = r\exp(it) \in \mathbf{C}\setminus\{0\}$ et $n \in \mathbf{N}\setminus\{0\}$. L'équation $Z^n = z$ a exactement n solutions complexes, les nombres*

$$z_0 = r^{\frac{1}{n}}e^{\frac{it}{n}}, ..., z_k = r^{\frac{1}{n}}e^{\frac{i(t+2k\pi)}{n}}, ..., z_{n-1} = r^{\frac{1}{n}}e^{\frac{i(t+2(n-1)\pi)}{n}}.$$

En particulier l'équation $Z^n = 1$ a exactement n solutions complexes appelées **racines n-èmes de l'unité**. *Ceux sont les nombres*

$$u_0 = 1, ..., u_k = e^{\frac{i2k\pi}{n}}, ..., u_{n-1} = e^{\frac{i2(n-1)\pi}{n}}.$$

Proposition 4.10 *L'ensemble $U_n = \{u_0, ..., u_{n-1}\}$ des racines n-èmes de l'unité muni de la multiplication est un groupe commutatif.*

Proposition 4.11 *Les racines n-èmes de l'unité différentes de 1 sont les solutions de l'équation*

$$1+...+z^k+...+z^{n-1} = 0.$$

Proposition 4.12

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{i2k\pi}{n}} = 0.$$

Exemples 4.3 — 1 et -1 sont les racines carrées de 1

— $1, j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont les racines cubiques de 1

— $1, i, -1$ et $-i$ sont les racines quatrièmes de 1

— $1, 1+j = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, j, -1, j^2$ et $1 + j^2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont les racines sixièmes de 1

— $1, \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), i, \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i), -1, \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i), -i$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$ sont les racines huitièmes de 1

— $1, \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}, 1+j, i, j, -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}, -1, -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}, j^2, -i, -j$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$ sont les racines douzièmes de 1

5 Interprétation géométrique

Considérons un **plan affine euclidien et orienté $\mathcal{P}$ muni du repère orthormé direct** $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Au point M de coordonnées (x, y) dans ce repère correspond le complexe $z = x+iy$ qui est appelé **affixe de** M. La **norme** du vecteur $\overrightarrow{OM}$ est égale au module de z : $||\overrightarrow{OM}|| = |z|$. La **mesure algébrique de l'angle orienté** $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})$ est égale à un argument de z (si $M \neq O$, ce qui est équivalent à dire si $z \neq 0$). L'identification point/affixe qu'on opère permet de visualiser les complexes ou inversement de résoudre des problèmes de géométrie plane à l'aide de ces nombres.

Le plan $\mathcal{P}$ ainsi indentifié à $\mathbf{C}$ est appelé **plan complexe**. Le complexe 0 est identifié à l'origine O, le complexe 1 est identifié au point de coordonnées $(1, 0)$ et le complexe i au point $(0, 1)$. L'axe des abscisses est identifié à $\mathbf{R}$ et celui des ordonnés à $i\mathbf{R}$. Enfin, si A et B sont deux points de $\mathcal{P}$ d'affixes a et b on identifie le vecteur $\overrightarrow{AB}$ au complexe $b-a$. La norme $||\overrightarrow{AB}||$ est égale au module $|b-a|$.

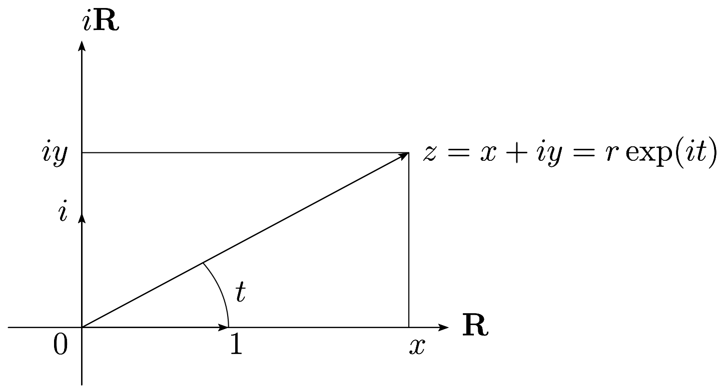


FIGURE 1 – Représentation graphique de $\mathbf{C}$.

Proposition 5.1 *Si A, B et C sont trois points distincts du plan affine euclidien d'affixes respectifs a, b et c alors la mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ est égale à l'argument du complexe* $\dfrac{b-c}{a-c}$.

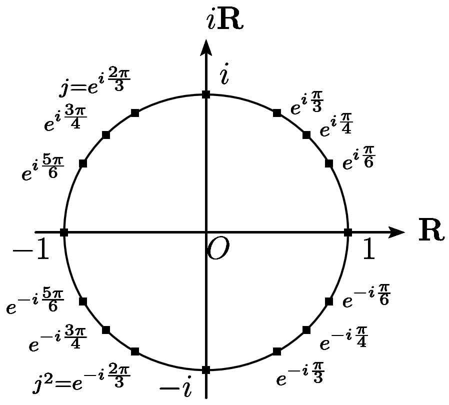


FIGURE 2 – Des racines de l'unité.

6 Droites et cercles

Proposition 6.1 *Soit δ une droite du plan $\mathcal{P}$ identifié avec $\mathbf{C}$.*

— *Si $0 \in \delta$ et $r_0e^{it_0} \in \delta \setminus \{0\}$ alors*

$$\delta = \{z = re^{it_0} | r \in \mathbf{R}\}.$$

— *Si $0 \notin \delta$ il existe $r_0 > 0$ et $t_0 \in \mathbf{R}$ tels que*

$$\delta = \{z = \frac{r_0}{\cos(t)} e^{i(t_0+t)} | t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\} = r_0e^{it_0} + \mathbf{R}e^{i(t_0+\frac{\pi}{2})}.$$

Le point $z_0 = r_0e^{it_0}$ est le point de δ le plus proche de l'origine.

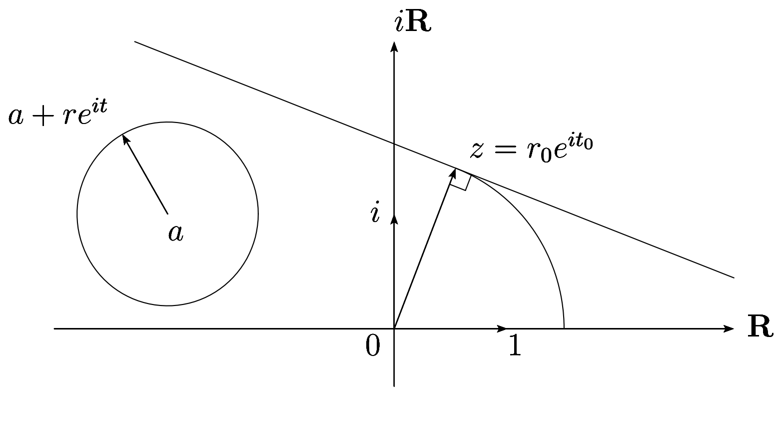


FIGURE 3 – Une droite et un cercle dans $\mathbf{C}$

Proposition 6.2 *Soit C un cercle du plan $\mathcal{P}$ identifié avec $\mathbf{C}$. Si a est son centre et r son rayon alors*

$$C = \{z \in \mathbf{C} | z - a = r\exp(it), t \in \mathbf{R}\}.$$

Proposition 6.3 *Soit $z_0 = r_0e^{it_0} \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ et C le cercle qui passe par 0 et z_0 et de centre $\frac{z_0}{2}$. Alors*

$$C = \{z = (r_0\cos(t))\exp(i(t_0 + t)) | t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}.$$

Proposition 6.4 *L'image de la droite $x + i\mathbf{R}$ par l'exponentielle est le cercle de centre l'origine et de rayon e^x.*

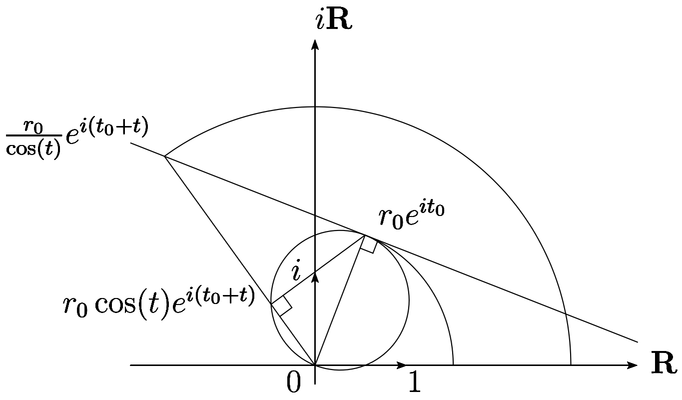


FIGURE 4 – Cercle qui passe par 0 et $z_0 = r_0e^{it_0}$.

7 Similitudes planes directes et indirectes, isométries et rotations

Proposition 7.1 *L'ensemble $\mathcal{S}^+$ des applications de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ de la forme $z \mapsto az + b$ avec $a \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ et $c \in \mathbf{C}$ muni de la loi de composition est un groupe. C'est le* **groupe des similitudes planes directes***.*

Proposition 7.2 *Les applications de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ de la forme $z \mapsto a\overline{z} + b$ avec $a \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ et $c \in \mathbf{C}$ sont les* **similitudes planes indirectes***. La composée de deux similitudes planes indirectes est une similitudes plane directe.*

Proposition 7.3 *L'ensemble $\mathcal{S}$ formé de toutes les similitudes planes, directes et indirectes, muni de la la loi de composition des applications, est un groupe,* **le groupe des similitudes planes***.*

Proposition 7.4 *Soit $t \in \mathbf{R}, r \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ et $b \in \mathbf{C}$. Alors*
- *L'application $z \mapsto \exp(it)z$ est* **la rotation** *de centre l'origine et d'angle t.*
- *L'application $z \mapsto rz$ est* **l'homothétie** *de centre l'origine et de rapport r.*
- *L'application $z \mapsto b + z$ est* **la translation** *de vecteur b.*
- *Si $t \notin 2\pi\mathbf{Z}$ alors l'application $z \mapsto b+\exp(it)z$ est la rotation de centre $\frac{b}{1-\exp(it)}$ et d'angle t.*
- *Si $r \neq 1$ alors l'application de $z \mapsto b + rz$ est l'homothétie de centre $\frac{b}{1-r}$ et de rapport r.*

Exemple 7.1 Les multiplications par i, j, $1+j$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ correspondent aux rotations d'angles $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{4}$.

Proposition 7.5
- *La conjugaison $z \mapsto \overline{z}$ est* **la symétrie orthogonale** *(ou* **réflexion***) par rapport à $i\mathbf{R}$.*
- *Soit $t \in \mathbf{R}$, $r \in \mathbf{R}$ et $b = r\exp(i(\frac{t+\pi}{2}))$. L'application $z \mapsto b + \exp(it)\overline{z}$ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\frac{b}{2} + \mathbf{R}\exp(i\frac{t}{2})$.*

Proposition 7.6 *Soient $a = r\exp(it) \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ et $b \in \mathbf{C}$. Alors*
- *La similitude plane directe $z \mapsto b + az = f(z)$ est la composée de la rotation $z \mapsto \exp(it)z = g(z)$ avec l'homothétie $z \mapsto rz = h(z)$ et avec la translation $z \mapsto b+z = t(z)$: $f = t \circ (h \circ g)$. Elle conserve les angles orientés et dilate les distances dans le rapport r.*

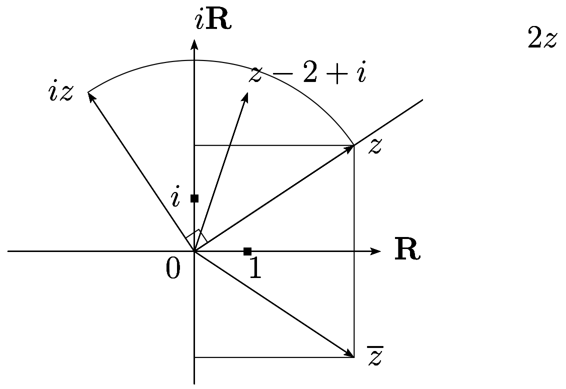


FIGURE 5 – $z, 2z, iz, z-2+i$ et $\overline{z}$

— *La similitude plane indirecte* $z \mapsto b+a\overline{z} = f(z)$ *est la composée de la symétrie orthogonale par rapport l'axe réel* $z \mapsto \overline{z} = g(z)$ *avec la similitude plane directe* $z \mapsto b+az = h(z)$ *:* $f = h \circ g$*. Elle change l'orientation, conserve les angles géométriques et dilate les distances dans le rapport* r*.*

Proposition 7.7 — *Une similitude plane directe qui admet plus de deux points fixes est l'identité. Si elle admet un unique point fixe* a *elle est de la forme* $z \mapsto a + r\exp(it)(z-a)$ *avec* $r > 0$*. Si elle n'admet pas de point fixe c'est une translation.*

— *Une similitude plane indirecte qui possède au moins deux points fixes est une symétrie orthogonale par rapport à une droite. Elle est de la forme* $z \mapsto a + \exp(it)\overline{z-a}$*. Si elle admet un unique point fixe* a *elle est de la forme* $z \mapsto a + r\exp(it)\overline{z-a}$ *avec* $r > 0$ *et* $r \neq 1$*. Une similitude plane indirecte qui n'admet pas de point fixe est une* **symétrie glissée**. *Elle est de la forme* $z \mapsto a + r\exp(i\frac{t}{2}) + \exp(it)\overline{z-a}$*.*

Proposition 7.8 — *La composée* $s_{a,t_2} \circ s_{a,t_1}$ *des deux réflexions par rapport aux droites concourantes* $a + \mathbf{R}\exp(it_1)$ *et* $a + \mathbf{R}\exp(it_2)$ *est la rotation* $z \mapsto a + \exp(2i(t_2 - t_1))(z-a)$*. La composée* $s_{b,t} \circ s_{a,t}$ *des deux réflexions par rapport aux droites parallèles* $a + \mathbf{R}\exp(it)$ *et* $b + \mathbf{R}\exp(it)$ *est la translation* $z \mapsto \mathrm{Re}\left((b-a)\exp(-i(t-\frac{\pi}{2}))\right)\exp(i(t-\frac{\pi}{2})) + z$*.*

— *La translation* $z \mapsto r\exp(i\frac{t}{2}) + z$ *et la réflexion* $z \mapsto a + \exp(it)\overline{z-a}$ *commutent et leur composée est la symétrie glissée* $z \mapsto a + r\exp(i\frac{t}{2}) + \exp(it)\overline{z-a}$*.*

8 Cocyclicité

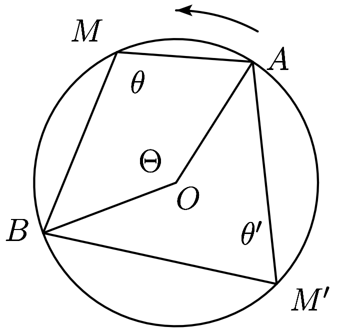
Proposition 8.1 *Soit* $A = \exp(i\alpha), B = \exp(i\beta)$ *et* $M = \exp(i\mu)$ *trois complexes distincts du cercle unité. Alors*

$$\frac{\exp(i\mu) - \exp(i\beta)}{\exp(i\mu) - \exp(i\alpha)} = \frac{\sin(\frac{\mu-\beta}{2})}{\sin(\frac{\mu-\alpha}{2})} \exp\left(i\frac{\beta-\alpha}{2}\right).$$

La version angulaire de cette proposition est le critère de cocyclicité suivant.

Proposition 8.2 *Soit* $A = \exp(i\alpha), B = \exp(i\beta)$ *et* $M = \exp(i\mu)$ *trois complexes distincts du cercle unité. Alors le double de la mesure* θ *de l'angle orienté* $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ *est indépendante du point* M *sur le cercle unité et est égale à la mesure* Θ *de l'angle orienté* $(\overrightarrow{0A}, \overrightarrow{0B})$ *c'est à dire* $\beta - \alpha$*.*

Cet énoncé admet lui même une version complexe :



$\Theta = 2\theta = 2\theta'$ modulo 2π

FIGURE 6 – Points cocycliques

Proposition 8.3 *Quatre points disnctincts A, B, C et D d'affixes a, b, c et d sont alignés ou sur un même cercle si et seulement si*

$$\frac{c-b}{c-a}\frac{d-a}{d-b} \in \mathbf{R}.$$

Proposition 8.4 *L'image d'une droite (respectivement d'un cercle) par une similitude est une droite (respectivement un cercle).*

Proposition 8.5 *Soient s, u, v, w quatre complexes tels que $sw - uv \neq 0$ et $v \neq 0$. Alors l'application $z \mapsto h(z) = \frac{sz+u}{vz+w}$ (appelée homographie) est une bijection de $\mathbf{C} \setminus \{-\frac{w}{v}\}$ sur $\mathbf{C} \setminus \{\frac{s}{v}\}$. De plus si a, b, c et d sont quatre complexes distincts et appartenant à $\mathbf{C} \setminus \{-\frac{w}{v}\}$ alors*

$$\frac{c-b}{c-a}\frac{d-a}{d-b} = \frac{h(c)-h(b)}{h(c)-h(a)}\frac{h(d)-h(a)}{h(d)-h(b)}$$

Proposition 8.6 *L'image d'un cercle ou d'une droite par une homographie est un cercle ou une droite.*

Deuxième partie

Fonctions et graphes

9 Introduction

Remarque 9.1 Nous ferons un usage élémentaire des notions d'*égalité*, d'*ensemble*, de *sous-ensemble*, d'*ensemble vide*, d'*élément*, d'*appartenance*, d'*inclusion*, d'*intersection,* de *réunion* et de *différence d'ensembles* ainsi que des symboles

$$=, \neq, \emptyset, \subset, \not\subset, \in, \notin, \cup, \cap, \setminus$$

qui leurs sont associés. Nous éviterons tant que possible le recours aux symboles $\forall$ et $\exists$ qui s'appellent respectivement **quantificateur universel** et **quantificateur existentiel** et se lisent respectivement *pour tout* et *il existe*.

Définition 9.1 Soient A et B deux ensembles. Une **fonction** (ou **application**) de A dans B est la donnée pour tout élément a de A d'un élément $b = f(a)$ de B appelé **valeur de f en** a. On note :

$$\begin{array}{ll} f: & A \to B \\ & a \mapsto f(a) = b. \end{array}$$

L'ensemble A s'appelle **domaine de** f, l'ensemble B s'appelle **l'ensemble d'arrivée** et le sous-ensemble

$$f(A) = \{b \in B | \exists a \in A, f(a) = b\}$$

de toutes les valeurs $f(a)$ obtenues lorsque a décrit A s'appelle **l'image de** f. Si $a \in A$ et $b \in B$ vérifient $b = f(a)$ alors b est appelé **image de** a **par** f et a est appelé **antécédent de** b **par** f. Si $b \in B$, le sous-ensemble de A formé de tous ses antécédents est noté $f^{-1}(b)$. Il est non vide si et seulement si b est un élément de $f(A)$

Exemples 9.1 Soit f la fonction dont le domaine est $A =]-1, 1[$, l'ensemble d'arrivée $B = \mathbf{R}$ et définie par la formule $f(x) = 2x^2$. Alors $f(]-1, 1[) = [0, 2[$ est différent de $\mathbf{R}$. On a $f^{-1}(\frac{2}{9}) = \{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}$ alors que $f^{-1}(3) = \emptyset$ est l'ensemble vide.

Définition 9.2 Soient $f : A \to B$ et $A' \subset A$. La **restriction** $f_{|A'}$ de f à A' est la fonction de A' dans B définie par $f_{|A'}(x) = f(x)$ si $x \in A'$. Si la restriction de f à A' vérifie une propriété donnée on dit que f vérifie cette propriété sur A'. Soit A'' et B'' des ensembles contenant respectivement A et B et g une application de A'' dans B''. Si pour tout élément $x \in A$ on a $f(x) = g(x)$ on dit que g **prolonge** f **à** A'' ou que g **est un prolongement de** f **à** A''.

Exemple 9.2 Soit $A' = \{a, b, c, d, e\}$, $A = \{a, b, c, d\}$, $B' = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$ et $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$. On considère l'application $f : A \to B$ définie par

$$\begin{array}{rcl} f(a) & = & \alpha \\ f(b) & = & \beta \\ f(c) & = & \gamma \\ f(d) & = & \delta, \end{array}$$

l'application $i : A' \to B'$ définie par

$$\begin{array}{rcl} i(a) & = & \alpha \\ i(b) & = & \beta \\ i(c) & = & \gamma \\ i(d) & = & \delta \\ i(e) & = & \epsilon \end{array}$$

et l'application $j : A' \to B$ définie par

$$\begin{array}{rcl} j(a) & = & \alpha \\ j(b) & = & \beta \\ j(c) & = & \gamma \\ j(d) & = & \delta \\ j(e) & = & \delta. \end{array}$$

Les applications i et j sont deux prolongements différents de f à A'. L'application f est la restriction de j à A : $j_{|A} = f$. Bien que $i(x) = f(x)$ pour tout élément x de A, f n'est pas la restriction de i à A car f et i n'ont pas le même ensemble d'arrivée.

10 Composition de fonctions, injection, surjection, bijection, réciproque

Définition 10.1 Si $f : A \to B$ et $g : B \to C$ sont deux fonctions on appelle **composée de** f **par** g la fonction $g \circ f$ (on lit **g rond f**) la fonction de A dans C définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ pour tout $x \in A$.

Exemple 10.1 On considère les ensembles $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$ et $C = \{1, 2, 3, 4\}$ et les applications $f : A \to B$ définie par

$$\begin{array}{rcl} f(a) & = & \alpha \\ f(b) & = & \beta \\ f(c) = f(d) & = & \delta \end{array}$$

et $g : B \to C$ définie par

$$\begin{array}{rcl} g(\alpha) & = & 1 \\ g(\beta) = g(\gamma) & = & 2 \\ g(\delta) = g(\epsilon) & = & 4. \end{array}$$

Alors la composée $g \circ f$ est l'application de A dans C définie par

$$\begin{array}{rcl} (g \circ f)(a) & = & 1 \\ (g \circ f)(b) & = & 2 \\ (g \circ f)(c) = (g \circ f)(d) & = & 4. \end{array}$$

Définition 10.2 On dit que $f : A \to B$ est **injective** si pour tous les x et x' de A distincts ($x \neq x'$) les images $f(x)$ et $f(x')$ sont distinctes ($f(x) \neq f(x')$), c'est à dire tout y de B possède au plus un antécédent.

Exemples 10.2 La fonction f de $\mathbf{R}$ dans $[0, +\infty)$ définie par $f(x) = x^2$ n'est pas injective car $f(1) = f(-1) = 1$. En revanche la fonction $g : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ définie par $g(x) = \sqrt{x}$ est injective car si x et x' sont positifs ou nuls et $\sqrt{x} = \sqrt{x'}$ alors $x = \sqrt{x}^2 = \sqrt{x'}^2 = x'$. Sauf si le domaine est réduit au singleton $\{0\}$, une fonction paire n'est jamais injective.

Définition 10.3 On dit que $f : A \to B$ est **surjective** si $f(A) = B$ c'est à dire si tout y dans B possède au moins un antécédent.

Exemples 10.3 La fonction f de $\mathbf{R}$ dans $[0, +\infty)$ définie par $f(x) = 2x^2$ est surjective car pour tout réel positif ou nul y il existe un réel x tel que $x^2 = y$. En revanche la fonction $g : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ définie par $g(x) = \sqrt{x}$ n'est pas surjective car un nombre strictement négatif n'est pas une racine carrée d'un réel.

Définition 10.4 On dit que $f : A \to B$ est **bijective** si elle est injective et surjective.

Remarque 10.1 La fonction $f : A \to B$ est bijective si et seulement si tout élément y de B admet un et un seul antécédent.

Exemple 10.4 La fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x) = 2x + 1$ est bijective car elle est injective et surjective (injective car si $x \neq x'$ alors $2x + 1 \neq 2x' + 1$ et surjective car si $y \in \mathbf{R}$ alors $x = \frac{y-1}{2}$ est un antécédent de y.

Définition 10.5 Soit $f : A \to B$. On dit que $g : B \to A$ est la **réciproque de** f (ou **inverse de** f **pour la composition**) si pour tous les x de A et tous les y de B on a $(g \circ f)(x) = x$ et $(f \circ g)(y) = y$.

Proposition 10.1 *Soit $f : A \to B$. La fonction f possède une réciproque si et seulement si elle est bijective et alors cette réciproque est unique.*

Notation 10.1 On note f^{-1} la réciproque de f si elle existe.

Remarque 10.2 Si g est la réciproque de f alors f est la réciproque de g.

Exemple 10.5 La fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x) = 2x + 1$ et la fonction g de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $g(y) = \frac{y-1}{2}$ sont réciproques l'une de l'autre.

Exemples 10.6 Soit $A' = \{a, b, c, d, e\}$, $A = \{a, b, c, d\}$ et $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$. On considère aussi les ensemble $C = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ et $D = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$. L'application $f : A \to B$ définie par

$$\begin{array}{rcl} f(a) & = & \alpha \\ f(b) & = & \beta \\ f(c) & = & \gamma \\ f(d) & = & \delta \end{array}$$

est injective mais elle n'est pas surjective. L'application $g : A \to C$ définie par

$$\begin{array}{rcl} g(a) = g(b) & = & \alpha \\ g(c) & = & \beta \\ g(d) & = & \gamma \end{array}$$

est surjective mais elle n'est pas injective L'application $h : A \to D$ définie par

$$\begin{array}{rcl} h(a) & = & \alpha \\ h(b) & = & \beta \\ h(c) & = & \gamma \\ h(d) & = & \delta \end{array}$$

est bijective. Sa réciproque est l'application $h^{-1} : D \to A$ définie par

$$\begin{array}{rcl} h^{-1}(\alpha) & = & a \\ h^{-1}(\beta) & = & b \\ h^{-1}(\gamma) & = & c \\ h^{-1}(\delta) & = & d. \end{array}$$

Définition 10.6 On dit de façon équivalente :
- f est injective et f est une **injection**,
- f est surjective et f est une **surjection**,
- f est bijective et f est une **bijection**.

11 Fonctions numériques

Définition 11.1 Une **fonction numérique** est une fonction à valeurs dans un sous-ensemble B $\mathbf{R}$. Une **fonction numérique de la variable réelle** est une fonction numérique définie sur un sous-ensemble A de l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels.

Remarque 11.1 Souvent une fonction numérique d'une variable réelle est donnée par une formule sans précision de son domaine. Le premier travail à faire est alors de trouver le domaine le plus grand sur laquelle elle est définie. Par exemple la fonction donnée par $f(x) = \frac{1}{x}$ admet pour domaine $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ et la fonction donnée par $g(x) = \sqrt{x}$ admet pour domaine $[0, +\infty)$.

Définition 11.2 La fonction **valeur absolue** est la fonction $|\ | : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ si $x < 0$.

Pour *visualiser* une fonction et ses propriétés on utilise son graphe.

Définition 11.3 Le graphe d'une fonction numérique de la variable réelle $f : A \to B$ est le sous-ensemble de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$

$$\{(x, f(x)) | x \in A\}.$$

Exemples 11.1 Voici le graphe de la fonction f de $[-1, 1]$ dans $\mathbf{R}$ et définie par la formule $f(x) = \frac{|x|}{2}$.

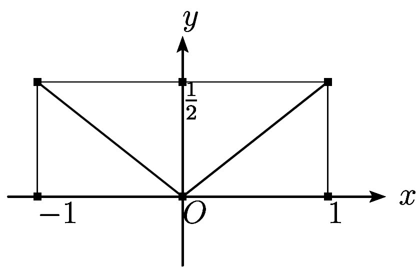


FIGURE 7 – Le graphe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}|x|$

Définition 11.4 Si f et g sont deux fonctions numériques définies sur A et si $\lambda \in \mathbf{R}$ on définit **la somme** $f + g$, **le produit** λf **et le produit** fg par :

$$\text{si } \ x \in A, \ (f+g)(x) = f(x) + g(x), \ (\lambda f)(x) = \lambda(f(x)), \ (fg)(x) = f(x)g(x).$$

Dans la suite on s'intéressera surtout à des fonctions numériques, et parmi ces fonctions, à celles de la variable réelle.

12 Les polynômes

Définition 12.1 On appelle **polynôme** une fonction P de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ pour laquelle il existe des réels en nombre fini $a_0, ..., a_d$ tels que si $x \in \mathbf{R}$ alors

$$P(x) = a_d x^d + ... + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k.$$

Les a_i s'appellent les **coefficients de** P. Si tous les a_i sont nuls le polynôme P est le **polynôme nul** et son **degré** est $-\infty$. Si au moins l'un des a_i est non nul, on appelle **degré** de P le plus grand indice i pour lequel a_i est non nul. Si seul a_d est non nul alors P est appelé **monôme de degré** d.

Proposition 12.1 *Si P et Q sont deux polynômes et $\lambda \in \mathbf{R}$ alors $P+Q$, PQ et λP sont des polynômes.*

Notation 12.1 Le polynôme dont les coefficients sont $a_0, ..., a_d$ est noté $a_d x^d + ... + a_1 x + a_0$ ou $\sum_{k=0}^{d} a_k x^k$.

Remarque 12.1 Si $(a_0, ..., a_d)$ et $(b_0, ..., b_f)$ sont associés à un même polynôme avec $a_d \neq 0$ et $b_f \neq 0$ alors $d = f$ et pour tout i on a $a_i = b_i$: les coefficients sont égaux.

Exemples 12.1 Le polynôme $P = x^2 - 3x + 2$ est un polynôme de degré 2. Si $c \in \mathbf{R}$ la fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x) = c$ est un polynôme de degré 0 ou $-\infty$ appelée **fonction constante** c. Si $a, b \in \mathbf{R}$ la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = ax + b$ est un polynôme de degré au plus 1 appelée **fonction affine**. Si $b = 0$ on dit que f est **linéaire**.

Théorème 12.1 *Soit A et B deux polynômes avec B non nul. Alors il existe un unique couple de polynômes (Q, R) tels que $A = BQ + R$ et le degré de R est strictement inférieur à celui de B.*

Définition 12.2 Soient A, B, Q, R des polynômes tels que B non nul, $A = BQ + R$ et le degré de R est strictement inférieur à celui de B. On dit que Q est le **quotient de la division euclidienne de** A **par** B et que R est le **reste**. Le polynôme A est appelé le **dividende** et le polynôme B le **diviseur**.

Exemple 12.2 $3x + 2$ et $-x + 1$ sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de $6x^3 + 4x^2 + 2x + 3$ par $2x^2 + 1$.

Proposition 12.2 *Soient $r \in \mathbf{R}$ et P un polynôme. Alors r est racine de P (i.e. $P(r) = 0$) si et seulement si le reste de la division euclidienne de P par $x - r$ est le polynôme nul.*

Exemple 12.3 On a $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ et 1 est racine de $x^2 - 1$.

Définition 12.3 Un nombre réel r est **racine** (**zéro**) d'une fonction f si $f(r) = 0$. Si f est un polynôme et si $m \in \mathbf{N}^*$ on dit que r est **racine** (**zéro**) **de multiplicité** m s'il existe un polynôme g tel que $f = (x-r)^m g$ et $g(r) \neq 0$.

Exemple 12.4 Soit $f = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$. Alors $f = (x+1)^2 g$ avec $g = x^2 + 1$. Or $g(-1) = 2$. Par conséquent -1 est racine de multiplicité 2 de f.

13 Fractions rationnelles

Définition 13.1 Soient f et g deux polynômes. Si g n'est pas le polynôme nul alors **la fraction rationnelle** $\frac{f}{g}$ est la fonction de $\mathbf{R} \setminus g^{-1}(0)$ dans $\mathbf{R}$ définie par $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Exemples 13.1 Le domaine de la fraction rationnelle $x \mapsto \frac{3x+2}{x^2+4}$ est $\mathbf{R}$ alors que le domaine de la fraction rationnelle $x \mapsto \frac{3x+2}{x^2-4}$ est $\mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$.

14 Parité

Définition 14.1 Une fonction $f : A \to B$ est dite **paire** (respectivement **impaire**) si pour tout $x \in A$ alors $-x \in A$ et $f(-x) = f(x)$ (respectivement $f(-x) = -f(x)$).

Proposition 14.1 *Soit $f : A \to B$ une fonction. On suppose que si $x \in A$ alors $-x \in A$. Alors il existe un unique couple (P, I) tel que $P : A \to \mathbf{R}$ est une fonction paire, $I : A \to \mathbf{R}$ est une fonction impaire et $f = P + I$. Si $x \in A$ alors $P(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $I(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$.*

Exemple 14.1 La valeur absolue est une fonction paire.

Exemple 14.2 Un polynôme non nul est pair si et seulement s'il est somme de monômes de degré pair. Il est impair si et seulement si il est somme de monômes de degré impair.

Exemple 14.3 Si f et g sont deux polynômes non nuls alors la fraction rationnelle $\frac{f}{g}$ est paire si et seulement si f et g sont simultanément pairs ou simultanément impairs et elle est impaire si et seulement si f est pair pendant que g est impair ou que f est impair pendant que g est pair.

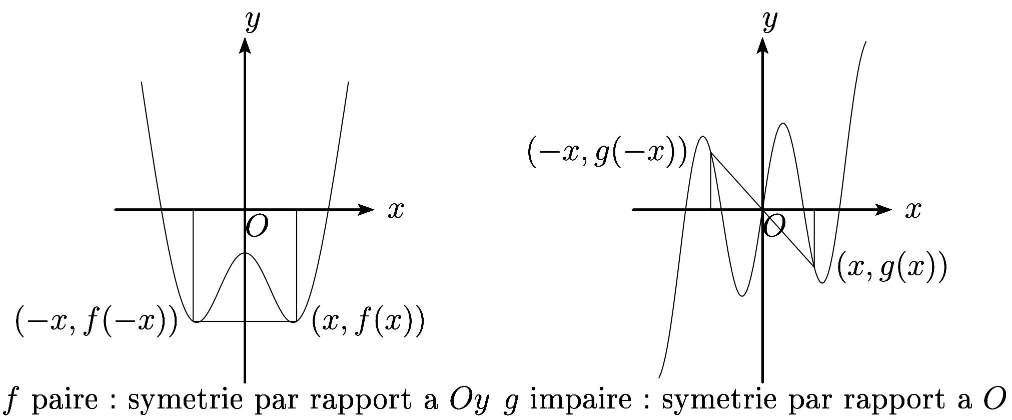


FIGURE 8 – Symétrie du graphe en fonction de la parité

15 Fonctions monotones

Définition 15.1 Soit $f : A \to B$. On dit que f est **croissante** si pour tous les x, x' de A tels que $x \leq x'$ on a $f(x) \leq f(x')$. On dit que f est **strictement croissante** si pour tous les x, x' de A tels que $x < x'$ on a $f(x) < f(x')$.

Définition 15.2 Soit $f : A \to B$. On dit que f est **décroissante** si pour tous les x, x' de A tels que $x \leq x'$ on a $f(x) \geq f(x')$. On dit que f est **strictement croissante** si pour tous les x, x' de A tels que $x < x'$ on a $f(x) > f(x')$.

Définition 15.3 Soit $f : A \to B$. On dit que f est **monotone** si elle est croissante ou si elle est décroissante. On dit qu'elle est **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou si elle est strictement décroissante.

Exemples 15.1 Les fonctions $x \mapsto 1$, $x \mapsto 5 + x$, $x \mapsto -2 + 4x + x^3$ et la racine carrée $\sqrt{\ }$ sont croissantes ($x \mapsto 5 + x$, $x \mapsto -2 + 4x + x^3$ et $\sqrt{\ }$ sont même strictement croissantes). Les fonctions $x \mapsto 2$, $x \mapsto 4 - 5x^7$ sont décroissantes ($4 - 5x^7$ est même strictement décroissante). Les fonctions $x \mapsto x^2$, valeur absolue, $x \mapsto \frac{1}{x}$ ne sont ni croissantes ni décroissantes.

Proposition 15.1 *Une fonction $f : A \to B$ qui est strictement monotone est injective.*

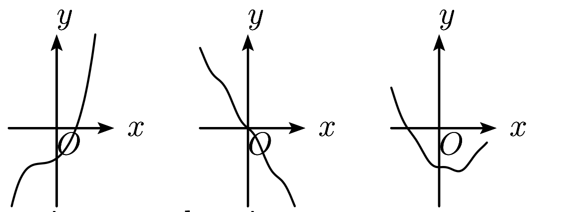


FIGURE 9 – Monotonie

16 Trigonométrie

Définition 16.1 Une fonction $f : A \to \mathbf{R}$ est dite **périodique** de **période** T si et seulement si pour tout $x \in A$ on a $x + T \in A$ et $f(x + T) = f(x)$.

Définition 16.2 On considère **un cercle de rayon 1**. Son périmètre vaut alors 2π (dire **deux pi**). On peut repérer les points de ce cercle par leurs coordonnées dans un repère orthonormé dont l'origine O est le centre du cercle. Les points du cercle sont les points dont les coordonnées (x, y) vérifient l'équation

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Notons A le point de coordonnées $(1, 0)$. Parcourir le cercle dans **le sens positif ou trigonométrique** c'est le parcourir dans les sens anti-horaire. Si on part de A et qu'on parcourt sur le cercle la longueur t en tournant positivement on arrive au point $M(t)$ de coordonnées $x = \cos(t)$ (dire **cosinus** t) et $y = \sin(t)$ (dire **sinus** t). Si on tourne négativement en parcourant la longueur t on arrive au point M de coordonnées $x = \cos(-t)$ et $y = \sin(-t)$.

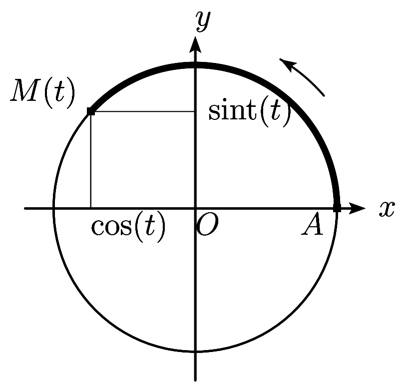


FIGURE 10 – Le cercle trigonométrique

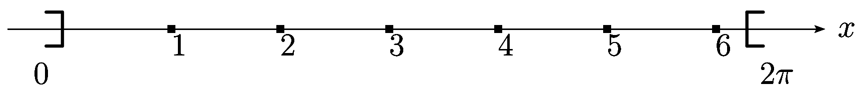


FIGURE 11 – Comparaison du périmètre d'un cercle de rayon 1 et de son rayon.

Proposition 16.1 *Les fonctions cosinus et sinus sont définies sur* $\mathbf{R}$*, à valeurs dans* $[-1, 1]$ *et vérifient*

$$\cos^2 + \sin^2 = 1.$$

Proposition 16.2 *La fonction cosinus est définie sur* $\mathbf{R}$*,* 2π*-périodique, paire, son image est le segment* $[-1, 1]$*. Elle est strictement décroissante sur l'intervalle* $[0, \pi]$*. Si* $t \in \mathbf{R}$ $\cos(\pi - t) = -\cos(t)$*. On a* $\cos(0) = 1, \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}, \cos(\frac{\pi}{2}) = 0, \cos(\pi) = -1$*. L'ensemble* $\cos^{-1}(0)$ *est égal à* $\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbf{Z}\}$*.*

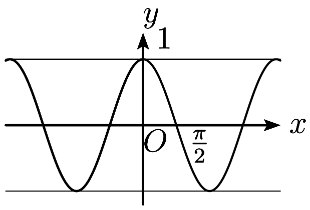


Figure 12 – Le graphe de cos

Proposition 16.3 *La fonction sinus est définie sur* $\mathbf{R}$*,* 2π*-périodique, impaire, son image est le segment* $[-1, 1]$*. Elle est strictement croissante sur l'intervalle* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$*. Si* $t \in \mathbf{R}$ $\sin(t) = \cos(t - \frac{\pi}{2})$*. On a* $\sin(0) = 0, \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}, \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin(\frac{\pi}{2}) = 1, \sin(\pi) = 0$*. L'ensemble* $\sin^{-1}(0)$ *est égal à* $\{k\pi | k \in \mathbf{Z}\}$*.*

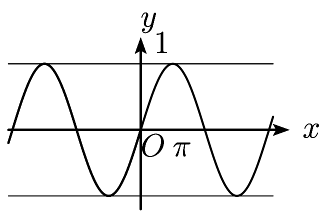


Figure 13 – Le graphe de sin

Proposition 16.4 *Pour tous les réels t et s on a*

$$\begin{aligned} \cos(t + s) = &\ \cos(t)\cos(s) - \sin(t)\sin(s) \\ \sin(t + s) = &\ \sin(t)\cos(s) + \cos(t)\sin(s). \end{aligned}$$

Définition 16.3 La fonction **tangente** est la fonction définie sur $\mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbf{Z}\}$ par

$$\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}.$$

Proposition 16.5 *La fonction tangente est* π*-périodique, impaire, son image est* $\mathbf{R}$*. Elle est strictement croissante sur* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$*.*

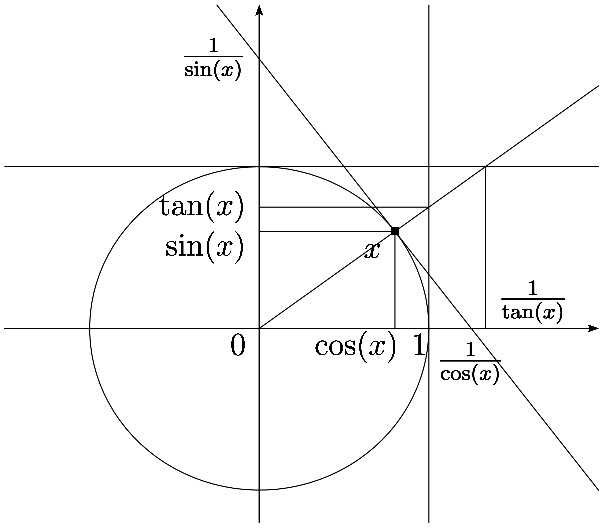


FIGURE 14 – $x, \cos(x), \sin(x), \tan(x), \frac{1}{\cos(x)}, \frac{1}{\sin(x)}$ et $\frac{1}{\tan(x)}$

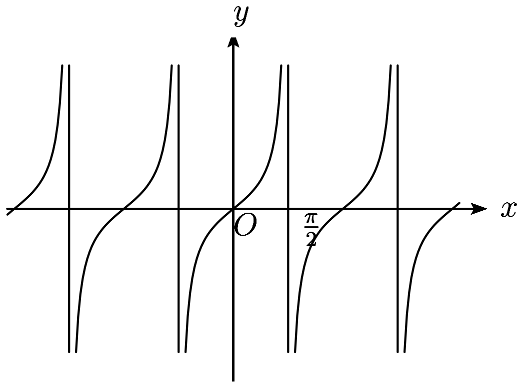


FIGURE 15 – Le graphe de tan

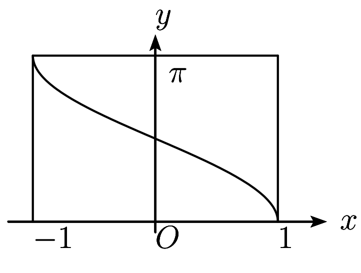


FIGURE 16 – Le graphe de arccos

Proposition 16.6 *Pour tous les réels t et s on a*

$$\tan(t+s) = \frac{\tan(t) + \tan(s)}{1 - \tan(t)\tan(s)}.$$

Définition 16.4 La fonction **arccosinus** est la fonction bijective et strictement décroissante de $[-1, 1]$ dans $[0, \pi]$ définie par $y = \arccos(x)$ si $x = \cos(y)$.

Définition 16.5 La fonction **arcsinus** est la fonction bijective et strictement croissante de $[-1, 1]$ dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ définie par $y = \arcsin(x)$ si $x = \sin(y)$.

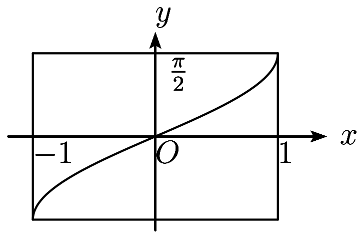


FIGURE 17 – Le graphe de arcsin

Proposition 16.7

$$\arcsin + \arccos = \frac{\pi}{2}.$$

Définition 16.6 La fonction **arctan** est la fonction bijective et strictement croissante de $\mathbf{R}$ dans
$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ définie par $y = \arctan(x)$ si $x = \tan(y)$.

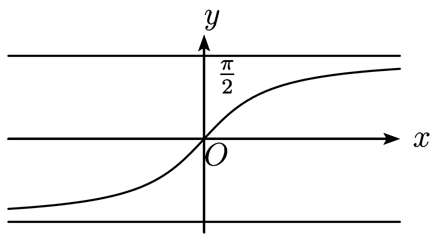


FIGURE 18 – Le graphe de arctan

17 Logarithme, exponentielle, trigonométrie hyperbolique

Définition 17.1 Intuitivement le **logarithme** (ou **logarithme neperien**) est la fonction de $]0, +\infty)$ dans $\mathbf{R}$ définie de la façon suivante. Si $x > 0$ alors $\ln(x)$ est l'aire (comptée algébriquement) de la zone délimitée par l'axe des abscisses le graphe de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$, la droite verticale qui passe par le point $(1, 0)$ et la droite verticale qui passe par le point $(x, 0)$.

Proposition 17.1 *La fonction logarithme est une bijection strictement croissante de* $]0, +\infty)$ *dans* $\mathbf{R}$ *qui vérifie la propriété d'addition suivante. Si* x *et* y *appartiennent à* $]0, +\infty)$ *alors*

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

En particulier

$$\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x).$$

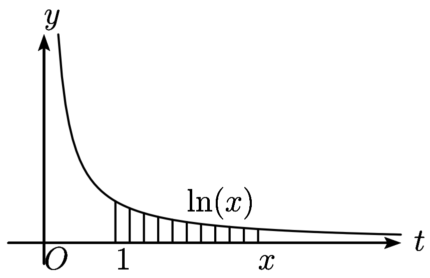


FIGURE 19 – Le graphe de $t \mapsto \frac{1}{t}$ et le logarithme

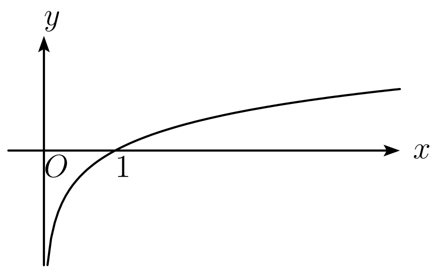


FIGURE 20 – Le graphe de ln

Définition 17.2 L'**exponentielle** est la fonction réciproque du logarithme. C'est une bijection strictement croissante de $\mathbf{R}$ dans $]0, +\infty)$ qui vérifie la propriété de multiplication suivante. Si x et y appartiennent à $\mathbf{R}$ alors

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).$$

En particulier

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.$$

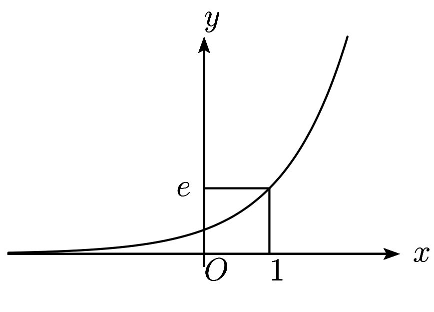


FIGURE 21 – Le graphe de exp

Définition 17.3 Si $x > 0$ et $y \in \mathbf{R}$ on définit x **puissance** y par $x^y = \exp(y\ln(x))$.

Proposition 17.2 *Soit* $x, x' > 0$ *et* $y, y' \in \mathbf{R}$. *On a*

$$(xx')^y = (x^y)(x'^y), \; x^{y+y'} = (x^y)(x^{y'}) \; \text{ et } \; (x^y)^{y'} = x^{yy'}.$$

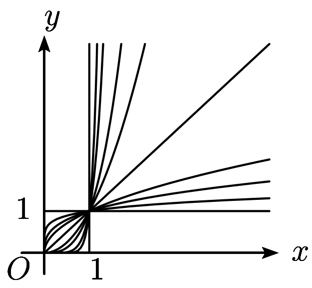


FIGURE 22 – Graphes de puissances

Notation 17.1 Si $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ on note $x^{\frac{1}{n}}$ parfois $\sqrt[n]{x}$.

Définition 17.4 Le **cosinus hyperbolique**, le **sinus hyperbolique** et la **tangente hyperbolique** sont les fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définies de la façon suivante. Si $x \in \mathbf{R}$ on pose

$$\cosh(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}, \ \sinh(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} \quad \text{et} \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

Remarque 17.1 Puisque le cosinus hyperbolique est, comme l'exponentielle, strictement positif, le domaine de la tangente hyperbolique est $\mathbf{R}$.

Proposition 17.3 *Le cosinus hyperbolique est pair. Son image est* $[1, +\infty)$. *Il est strictement croissant sur* $[0, +\infty)$.

Proposition 17.4 *Le sinus hyperbolique est impair et c'est une bijection strictement croissante de* $\mathbf{R}$ *dans* $\mathbf{R}$.

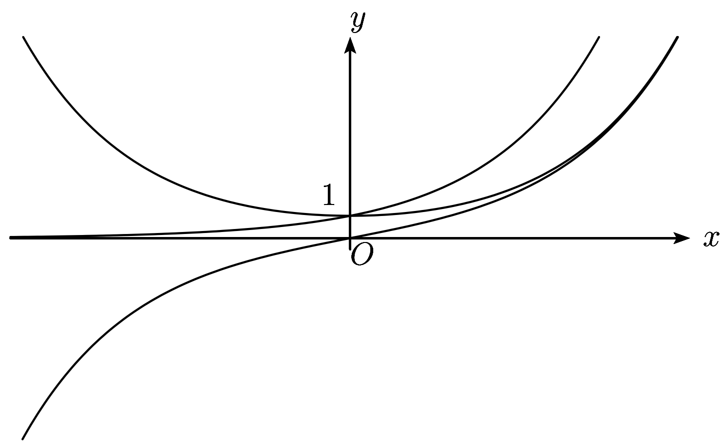


FIGURE 23 – Les graphes du cosinus hyperbolique, du sinus hyperbolique et de l'exponentielle

Proposition 17.5 *La tangente hyperbolique est impaire et c'est une bijection strictement croissante de* $\mathbf{R}$ *dans* $]-1, 1[$.

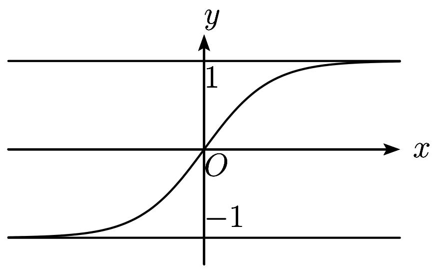


FIGURE 24 – Le graphe de tanh

Proposition 17.6 *Si $x, y \in \mathbf{R}$ alors*

$$\begin{aligned} \exp(x) &= \cosh(x) + \sinh(x) \\ \cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= 1 \\ \cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) \\ \sinh(x+y) &= \cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y). \end{aligned}$$

Remarque 17.2 L'identité $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ permet de donner une interprétation graphique du cosinus hyperbolique et du sinus hyperbolique. La courbe déquation $u^2 - v^2 = 1,\ u > 0$ est une branche d'hyperbole qui admet comme paramétrisation bijective l'application $x \in \mathbf{R} \mapsto (\cosh(x), \sinh(x))$. L'aire délimitée par le segment d'extrémités $(0,0)$ et $(1,0)$, par le segment d'extrémités $(0,0)$ et $(\cosh(x), \sinh(x))$ et par l'arc d'hyperbole reliant $(0,0)$ et $(\cosh(x), \sinh(x))$ est $\frac{x}{2}$. Pour le montrer on se place dans le système de coordonnées orthogonales $U = \frac{(u-v)}{\sqrt{2}}$, $V = \frac{(u+v)}{\sqrt{2}}$. Dans ces coordonnées l'équation de l'hyperbole est $V = \frac{1}{2U}$, $U > 0$ et l'aire considérée est l'aire délimitée par le segment d'extrémités $(0,0)$ et $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, par le segment d'extrémités $(0,0)$ et $(\frac{\exp(t)}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}\exp(t)})$ et par l'arc d'hyperbole reliant $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, et $(\frac{\exp(t)}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}\exp(t)})$.

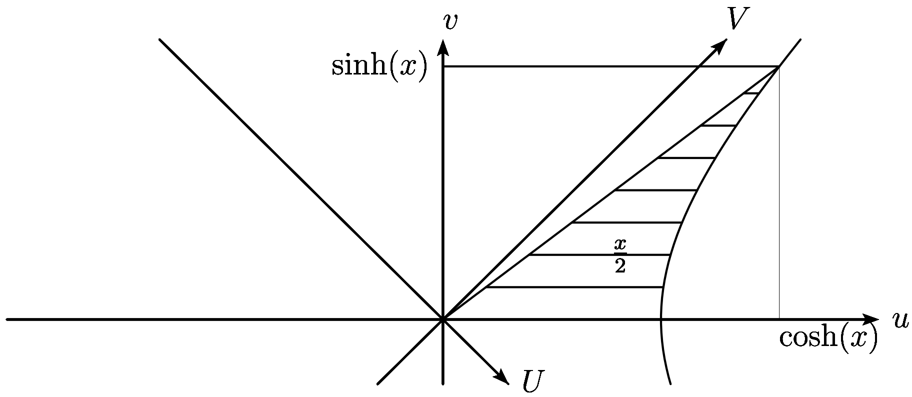


FIGURE 25 – x, $\cosh(x)$ et $\sinh(x)$

Proposition 17.7 *Pour tous les réels t et s on a*

$$\tanh(t+s) = \frac{\tanh(t) + \tan(s)}{1 + \tan(t)\tan(s)}.$$

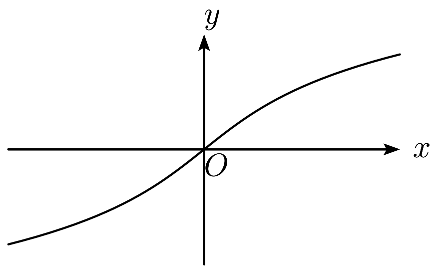


FIGURE 26 – Le graphe de argsh

Définition 17.5 La fonction **argsh** est la fonction bijective et strictement croissante de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $y = \operatorname{argsh}(x)$ si $x = \sinh(y)$.

Définition 17.6 La fonction **argch** est la fonction bijective et strictement croissante de $[1, +\infty)$ dans $[0, +\infty)$ définie par $y = \operatorname{argch}(x)$ si $x = \cosh(y)$.

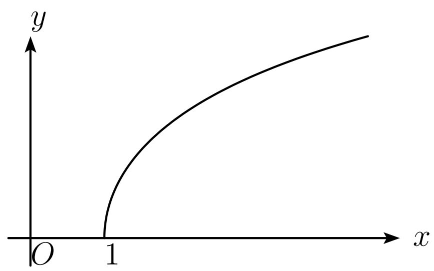


FIGURE 27 – Le graphe de argch

Définition 17.7 La fonction **argth** est la fonction bijective et strictement croissante de $]-1, 1[$ dans $\mathbf{R}$ définie par $y = \operatorname{argth}(x)$ si $x = \tanh(y)$.

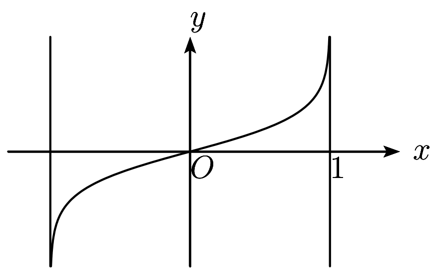


FIGURE 28 – Le graphe de argth

Proposition 17.8

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{argsh}(x) & = & \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \\ \operatorname{argch}(x) & = & \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \\ \operatorname{argth}(x) & = & \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \end{array}$$

Troisième partie

Limites de fonctions, fonctions continues

18 Limite d'une suite

Définition 18.1 Soit $n_0 \in \mathbf{N}$. On appelle **suite numérique débutant au rang** n_0 une application u définie sur $\{n \in \mathbf{N}; n \geq n_0\}$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$.

Remarque 18.1 Si $n_0 = 0$ on parle simplement de **suite numérique**.

Notation 18.1 On note $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ et si n est un entier naturel supérieur ou égal à n_0 alors u_n désigne l'image $u(n)$ de n par u et s'appelle **le n-ème terme de la suite u ou le terme d'indice** n.

Définition 18.2 Soit $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ une suite numérique débutant au rang n_0. Soit $l \in \mathbf{R}$. On dit que u **admet l comme limite** si u_n est arbitrairement proche de l lorsque n est arbitrairement grand.

Notation 18.2 L'écriture $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$ signifie que u admet l comme limite.

Remarque 18.2 (culturelle) La phrase u_n *est arbitrairement proche de l lorsque n est arbitrairement grand* est équivalente à la formulation *Pour tout intervalle ouvert I contenant l il existe un rang $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n le terme u_n appartient à I* :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, [(n \geq n_0 \text{ et } n \geq N) \Rightarrow (|u_n - l| < \varepsilon)].$$

Exemples 18.1
- La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par la relation $u_n = \frac{1}{n}$ admet 0 comme limite. En effet si $\varepsilon > 0$ alors pour tout entier n supérieur ou égal à "1+la partie entière de $\frac{1}{\varepsilon}$" on a $|u_n - 0| < \varepsilon$.
- La suite $(v_n)_{n \geq 0}$ définie par la relation $v_n = \frac{1}{2^n}$ admet 0 comme limite. En effet si $\varepsilon > 0$ alors pour tout entier n supérieur ou égal à "1+la partie entière de $\frac{1}{\varepsilon}$" on a $|v_n - 0| < \varepsilon$. Pour s'en convaincre il suffit d'observer que pour tout entier naturel n on a $n \leq 2^n$.

Proposition 18.1 *Si u admet une limite cette limite est unique.*

Définition 18.3 Soit $\lambda \in \mathbf{R}$, u suite numérique débutant au rang n_0 et v une suite numérique débutant au rang n_0'. On définit les suites $u + v$, uv et λu en posant

$$(u + v)(n) = u(n) + v(n),\ (uv)(n) = u(n)v(n) \text{ et } (\lambda u)(n) = \lambda u(n)$$

si n est supérieur ou égal à n_0 et à n_0'. Si les termes de u sont tous non nuls alors on définit la suite $\frac{1}{u}$ en posant

$$(\frac{1}{u})(n) = \frac{1}{u(n)} \text{ si } n \geq n_0.$$

Proposition 18.2 *Si u et v admettent comme limites l et l' et si $\lambda \in \mathbf{R}$ alors les suites $u + v$, uv et λu admettent respectivement $l + l'$, ll' et λl comme limites. Si les termes de u sont tous non nuls et $l \neq 0$ alors $\frac{1}{u}$ admet $\frac{1}{l}$ comme limite.*

19 Limite finie, continuité

Définition 19.1 Soit $f : A \to \mathbf{R}$, soient a et l dans $\mathbf{R}$. On suppose qu'il existe $h > 0$ tel que $]a, a+h[$ ou $]a-h, a[$ soit inclus dans A. On dit que f **possède une limite en a égale à l** si les valeurs $f(x)$ sont arbitrairement proches de l lorsque x est arbitrairement proche de a en étant dans $A \cap]a-h, a+h[$.

Notation 19.1 L'écriture $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ signifie que f possède une limite égale à l en a.

Remarque 19.1 (culturelle) La phrase *Les valeurs $f(x)$ sont arbitrairement proches de l lorsque x est arbitrairement proche de a en étant dans* $A \cap]a-h, a+h[$ est équivalente à la formulation *Pour tout intervalle ouvert I contenant l il existe un intervalle ouvert non vide J contenant a et tel que l'image $f(J)$ soit incluse dans I* :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, [(|x-a| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - l| < \varepsilon)].$$

Remarque 19.2 Dans certains cours on prend une définition différente de la limite en a. En particulier au lieu de prendre $x \in A \cap]a-h, a+h[$ comme ici, certains auteurs préfèrent prendre $x \in (A \cap (]a-h, a[\cup]a, a+h[))$ qui correspond dans notre texte à la définition ci-dessous de *possèder une limite en a quand x tend vers a en étant différent de a.* Le choix fait dans ce document permet d'avoir un énoncé simple du théorème de composition des limites.

Définition 19.2 Soit $f : A \to \mathbf{R}$, soient a et l dans $\mathbf{R}$. On suppose qu'il existe $h > 0$ tel que l'intervalle $]a, a+h[$ est inclus dans A. On dit que f **possède une limite à droite en a égale à l** si les valeurs $f(x)$ sont arbitrairement proches de l lorsque x est arbitrairement proche de a en étant dans $]a, a+h[$.

Notation 19.2 L'écriture $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l$ signifie que f possède une limite à droite égale à l en a.

Remarque 19.3 (culturelle) La phrase *Les valeurs $f(x)$ sont arbitrairement proches de l lorsque x est arbitrairement proche de a en étant dans* $]a, a+h[$ est équivalente à la formulation *Pour tout intervalle ouvert I contenant l il existe un intervalle ouvert non vide J dont l'extrémité gauche est a et tel que l'image $f(J)$ soit incluse dans I.*

Remarque 19.4 La condition *Il existe $h > 0$ tel que l'intervalle $]a, a+h[$ est inclus dans A* est toujours vérifiée si a est dans A et A est un intervalle ouvert ou une réunion d'intervalles ouverts.

Remarque 19.5 On définit de façon analogue à la limite à droite la **limite à gauche** et l'écriture $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l$ signifie que f possède une limite à gauche égale à l en a.

Définition 19.3 Soit $f : A \to \mathbf{R}$, soient a et l dans $\mathbf{R}$. On suppose qu'il existe $h > 0$ tel que $]a, a+h[$ ou $]a-h, a[$ soit inclus dans A. On dit que f **possède une limite en a quand x tend vers a en étant différent de a égale à l** si les valeurs $f(x)$ sont arbitrairement proches de l lorsque x est arbitrairement proche de a en étant dans $A \cap (]a-h, a[\cup]a, a+h[)$.

Notation 19.3 L'écriture $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = l$ signifie que f possède une limite à égale à l quand x tend vers a en étant différent de a.

Proposition 19.1 *Si f possède une limite en a (respectivement une limite à gauche ou à droite) cette limite est unique.*

Remarque 19.6 Soit $f : A \to \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$ et $h > 0$ tel que $]a, a+h[\subset A$ (respectivement $]a-h, a[\subset A$). Si f possède une limite en a alors f possède une limite à droite (respectivement à gauche) et ces limites sont égales.

Remarque 19.7 Soit $f : A \to \mathbf{R}$ et soit $a \in A$. Si f possède une limite en a alors cette limite vaut $f(a)$.

Définition 19.4 Soient $f : A \to \mathbf{R}$ et $a \in A$. On dit que f est **continue en** a si f possède une limite en a. Dans ce cas nécessairement cette limite vaut $f(a)$.

Remarque 19.8 Ici, il est **important** que a appartienne à A.

Définition 19.5 On dit que $f : A \to \mathbf{R}$ est **continue** si pour tout a dans A f est continue en a.

Remarque 19.9 La fonction f est continue en a si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x)$ existe et vaut $f(a)$.

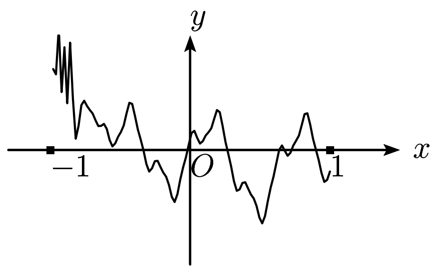


FIGURE 29 – graphe d'une fonction continue sur]01[

Remarque 19.10 (culturelle) La notion de continuité traduit (imparfaitement) le tracé du graphe de la fonction sans lever le stylo. En revanche la continuité en un point est une notion plus faible.

Exemple 19.1
- Soit $\lambda \in \mathbf{R}$ et soient f et g les fonctions définies sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x$ et par $g(x) = \lambda$ si $x \in \mathbf{R}$. On vérifie facilement en utilisant la formulation *Pour tout intervalle ouvert I contenant l il existe un intervalle ouvert non vide J dont l'extrémité gauche est a et tel que l'image $f(J)$ soit incluse dans I* que si $a \in \mathbf{R}$ alors $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = a$ (prendre $J = I\cap]a, +\infty)$) et $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = \lambda$ (prendre $J =]a, +\infty)$). On obtient de façon analogue le même résultat pour les limites à gauche. On en déduit que f et g sont continues.
- Soit f la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(0) = 1$ et $f(x) = 0$ si $x \neq 0$. Alors f est continue en x si $x \neq 0$ mais elle n'est pas continue en 0 car $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq 1 = f(0)$: les limites à gauche et à droite de f en 0 existent, sont égales mais diffèrent de $f(0)$.
- Soit f la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(0) = 1$, $f(x) = 0$ si $x < 0$ et $f(x) = 2$ si $x > 0$. Alors $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2 \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$: les limites à gauche et à droite de f en 0 existent mais sont différentes.
- Soit f la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Alors f n'a pas de limite à droite (ni à gauche) en 0.

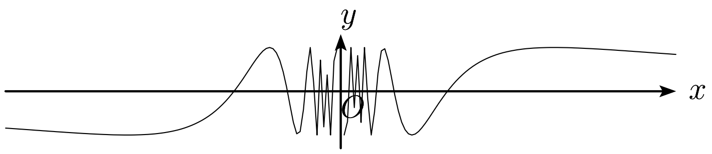


FIGURE 30 – Le graphe de $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$

20 Limites infinies vs limites à l'infini

On peut être intéressé au comportement d'une fonction lorsque la variable x devient arbitrairement grande positivement ou négativement. Pour cette raison on introduit les notions de limite en $+\infty$ et en $-\infty$.

Définition 20.1 Soit $f : A \to \mathbf{R}$. On suppose qu'il existe $A_0 \in A$ tel que $]A_0, +\infty) \subset A$. On dit que f **possède une limite en $+\infty$ égale à l** si les valeurs $f(x)$ sont arbitrairement proches de l lorsque x est arbitrairement grand positivement.

Remarque 20.1 (culturelle) La phrase *Les valeurs $f(x)$ sont arbitrairement proches de l lorsque x est arbitrairement grand positivement* est équivalente à la formulation *Pour tout intervalle ouvert I contenant l il existe un intervalle ouvert J du type $J =]\lambda, +\infty)$ avec $\lambda > 0$ dont l'image $f(J)$ est incluse dans I.*

Définition 20.2 Soit $f : A \to \mathbf{R}$. On suppose qu'il existe $A_0 \in A$ tel que $(-\infty, A_0[\subset A$. On dit que f **possède une limite en $-\infty$ égale à l** si les valeurs $f(x)$ sont arbitrairement proches de l lorsque x est négatif et sa valeur absolue est arbitrairement grande.

Notations 20.1 L'écriture $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ signifie que f possède une limite égale à l en $+\infty$. L'écriture $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$ signifie que f possède une limite égale à l en $-\infty$.

Exemple 20.1 La fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ vérifie $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to+\infty} f(x)$.

On souhaite aussi caractériser le comportement d'une fonction qui prend des valeurs $f(x)$ arbitrairement grandes à proximité d'un réel a.

Définition 20.3 Soit $f : A \to \mathbf{R}$ et soit a dans $\mathbf{R}$. On dit que $+\infty$ (respectivement $-\infty$) est **la limite à droite de f en a** si les deux conditions suivantes sont vérifiées.
- Il existe $h > 0$ tel que l'intervalle $]a, a+h[$ est inclus dans A.
- Les valeurs $f(x)$ sont positives et arbitrairement grandes (respectivement négatives et de valeurs absolues arbitrairement grandes) lorsque x est arbitrairement proche de a en étant dans $]a, a+h[$.

Remarque 20.2 (culturelle) La phrase *Les valeurs $f(x)$ sont positives et arbitrairement grandes lorsque x est arbitrairement proche de a en étant dans $]a, a+h[$* est équivalente à la formulation *Pour tout intervalle ouvert I de type $]\lambda, +\infty)$ avec $\lambda > 0$ il existe un intervalle ouvert non vide J dont l'extrémité gauche est a et dont l'image $f(J)$ est incluse dans I.*

On a des définitions analogues pour des limites à gauche égales à $+\infty$ ou $-\infty$.

Définition 20.4 Si $a \notin A$, on dit que $+\infty$ (respectivement $-\infty$) est **la limite de f en a** si c'est à la fois la limite à droite et la limite à gauche de f en a.

Exemple 20.2 La fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ vérifie $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$. Cette fonction n'a donc pas de limite en 0 car elle a des limites à droite et à gauche en 0 qui sont différentes.

Notation 20.2 On utilise suivant les cas les notations suivantes : $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Enfin on caractérise le comportement d'une fonction qui prend des valeurs $f(x)$ arbitrairement grandes pour des x arbitrairement grands.

Définition 20.5 Soit $f : A \to \mathbf{R}$. On suppose qu'il existe $A_0 \in A$ tel que $]A_0, +\infty) \subset A$. On dit que $+\infty$ (respectivement $-\infty$) est **limite de f en $+\infty$** si les valeurs $f(x)$ sont positives et arbitrairement grandes (respectivement négatives et de valeurs absolues arbitrairement grandes) lorsque x est positif et arbitrairement grand.

On a des définitions analogues pour des limites infinies en $-\infty$.

Notation 20.3 On utilise suivant les cas les notations suivantes : $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$.

Exemple 20.3 La fonction définie par $f(x) = x^3$ vérifie $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ alors que la fonction définie par $g(x) = x^2$ vérifie $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty = \lim_{x\to -\infty} f(x)$.

Remarque 20.3 Qu'elle soit finie ou infinie, la limite en $a \in \mathbf{R}$ ou en $+\infty$ ou $-\infty$ est toujours unique.

21 Règles algébriques

Proposition 21.1 *Soit f et g deux fonctions numériques de la variable réelle, $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et $l, l' \in \mathbf{R}$. On suppose que $\lim_{x\to a} f(x) = l$ et $\lim_{x\to a} f(x) = l'$. Alors*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} f(x) + g(x) &= \quad l + l' \\ \lim_{x\to a} f(x)g(x) &= \quad ll' \\ \textbf{si} \quad l' \neq 0,\ \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \quad \frac{l}{l'} \end{aligned}$$

Proposition 21.2 *Soit f une fonction numériques, $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou si $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ alors*

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ **et si f est strictement positive** *alors*

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ **et si f est strictement négative** *alors*

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = -\infty.$$

Proposition 21.3 *Soit f et g deux fonctions numériques, $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et $l \in \mathbf{R}$. On suppose que $\lim_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$. Alors*

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} -g(x) &= \ -\infty \\
\lim_{x \to a} f(x) + g(x) &= \ +\infty \\
\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \ 0 \\
\textbf{si} \quad l > 0, \ \lim_{x \to a} f(x)g(x) = \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} &= \ +\infty \\
\textbf{si} \quad l < 0, \ \lim_{x \to a} f(x)g(x) = \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} &= \ -\infty
\end{aligned}$$

Proposition 21.4 *Soit f et g deux fonctions numériques, $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et $l \in \mathbf{R}$. On suppose que $\lim_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$. Alors*

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} -g(x) &= \ +\infty \\
\lim_{x \to a} f(x) + g(x) &= \ -\infty \\
\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \ 0 \\
\textbf{si} \quad l > 0, \ \lim_{x \to a} f(x)g(x) = \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} &= \ -\infty \\
\textbf{si} \quad l < 0, \ \lim_{x \to a} f(x)g(x) = \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} &= \ +\infty
\end{aligned}$$

Proposition 21.5 *Soit f et g deux fonctions numériques et $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On suppose que $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$. Alors*

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} f(x) + g(x) &= \ +\infty \\
\lim_{x \to a} f(x)g(x) &= \ +\infty.
\end{aligned}$$

Proposition 21.6 *Soit f et g deux fonctions numériques et $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On suppose que $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ et que $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$. Alors*

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} f(x) + g(x) &= \ -\infty \\
\lim_{x \to a} f(x)g(x) &= \ +\infty.
\end{aligned}$$

Proposition 21.7 *Soit f et g deux fonctions numériques et $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On suppose que $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ et que $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$. Alors*

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = -\infty.$$

Remarques 21.1 Ces propositions donnent la liste exhaustive de toutes les situations où on déduit les limites de $f+g$, fg ou $\frac{f}{g}$ en a de la seule connaissance des limites de f et g en a. Les situations non envisagées s'appellent **les formes indéterminées**. Dans **tous ces autres cas** $f+g$, fg ou $\frac{f}{g}$ n'ont pas nécessairement de limites en a et la preuve de l'existence éventuelle de limites nécessite de développer une argumentation.

22 Composition

Proposition 22.1 *Soient $f : A \to \mathbf{R}$ $g : B \to \mathbf{R}$ deux fonctions telles que $f(A)$ soit inclus dans B. Soient $a, b, l \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{y \to b} g(y) = l$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = l$.*

Remarque 22.1 La simplicité de cet énoncé résulte du choix qu'on a fait de la définition de limite.

Proposition 22.2 *Si $f : A \to \mathbf{B}$ et $g : B \to \mathbf{R}$ sont continues alors $g \circ f : A \to \mathbf{R}$ est continue.*

23 Comparaison

Proposition 23.1 *Soient f, g et h trois fonctions numériques définies sur un sous ensemble A de $\mathbf{R}$ et soient a dans $\mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et l dans $\mathbf{R}$. On suppose que si $x \in A$ alors $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. On suppose aussi que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = l$. Alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l$.*

Proposition 23.2 *Soient f et g deux fonctions numériques définies sur un sous ensemble A de $\mathbf{R}$ et soit a dans $\mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On suppose que si $x \in A$ alors $f(x) \leq g(x)$. On suppose aussi que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$. Alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$.*

Exemple 23.1 On admet que si $x > 0$ alors $\sin(x) < x$. De plus si $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, l'inégalité triangulaire appliquée à un triangle rectangle d'hypothénuse 1 et dont les longueurs des deux autres côtés sont $\sin(x)$ et $\cos(x)$ implique que $1 - \cos(x) < \sin(x)$ et donc $1 - \cos(x) < x$. On déduit de ces inégalités, de la continuité de $x \mapsto x$, du théorème de comparaison et de la parité que les fonctions sinus et cosinus sont continues en 0.

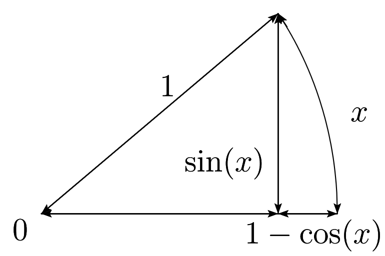


FIGURE 31 – $\sin(x) < x$ et $1 - \cos(x) < \sin(x) < x$

24 Continuité des fonctions classiques

Proposition 24.1 *Les polynômes, les fonctions rationnelles, la valeur absolue, les fonctions* cos, sin, tan, arccos, arcsin, arctan, ln, exp, cosh, sinh, tanh, argch, argsh *et* argth *sont continues sur leurs domaines respectifs.*

25 Quelques limites classiques

Proposition 25.1 *Si* $n \in \mathbf{N}^*$ *alors*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} x^n &= +\infty & \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} &= 0 \\
\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} &= +\infty & \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} &= -\infty \text{ si } n \text{ impair} \\
& & \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} &= +\infty \text{ si } n \text{ pair.}
\end{aligned}$$

Cette proposition permet de calculer des limites des fonctions rationnelles.

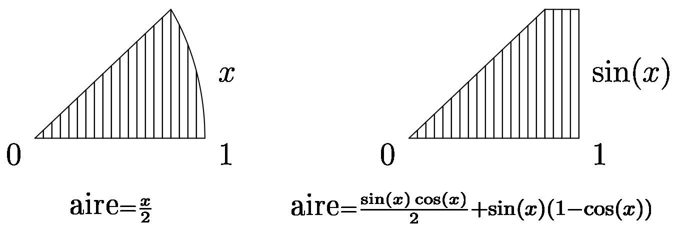


FIGURE 32 – $\frac{\sin(x)}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\sin(x)\cos(x)}{2} + \sin(x)(1-\cos(x))$

Proposition 25.2 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$

Proposition 25.3

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) &= +\infty & \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) &= -\infty \\
\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) &= \tfrac{\pi}{2} & \lim_{x\to-\infty} \arctan(x) &= -\tfrac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Proposition 25.4 *Si* $x > 0$ *alors* $\ln(1+x) < x$.

On déduit de cette proposition et des résultats de composition et de comparaison précédents quelques limites classiques relatives aux fonctions de la trigonométrie hyperboliques.

Proposition 25.5

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \exp(x) &= +\infty & \lim_{x\to-\infty} \exp(x) &= 0 \\
\lim_{x\to+\infty} \ln(x) &= +\infty & \lim_{x\to 0^+} \ln(x) &= -\infty
\end{aligned}$$

Proposition 25.6 *Si* $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x^\lambda} &= +\infty & \lim_{x\to-\infty} |x|^\lambda \exp(x) &= 0 \\
\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\lambda} &= 0 & \lim_{x\to 0^+} x^\lambda \ln(x) &= 0.
\end{aligned}$$

Proposition 25.7

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \cosh(x) &= +\infty & \lim_{x\to-\infty} \cosh(x) &= +\infty \\
\lim_{x\to+\infty} \sinh(x) &= +\infty & \lim_{x\to-\infty} \sinh(x) &= -\infty \\
\lim_{x\to+\infty} \tanh(x) &= 1 & \lim_{x\to-\infty} \tanh(x) &= -1
\end{aligned}$$

Proposition 25.8

$$\begin{array}{llll}\lim_{x\to+\infty} \operatorname{argch}(x) & =+\infty & \lim_{x\to 1^+} \operatorname{argch}(x) & =0 \\ \lim_{x\to+\infty} \operatorname{argsh}(x) & =+\infty & \lim_{x\to-\infty} \operatorname{argsh}(x) & =-\infty \\ \lim_{x\to 1^-} \operatorname{argth}(x) & =+\infty & \lim_{x\to -1^+} \operatorname{argth}(x) & =-\infty\end{array}$$

26 Asymptotes

Définition 26.1 Si $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=\alpha$ (respectivement $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}=\alpha$) on dit que f **admet comme direction asymptotique en** $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) la direction $y=\alpha x$ (ou $x=0$ si $\alpha\in\{-\infty,+\infty\}$).

Définition 26.2 Si $|\lim_{x\to a^+} f(x)|=+\infty$ et si $|\lim_{x\to a^-} f(x)|=+\infty$ on dit que la droite verticale d'équation $x=a$ est **asymptote au graphe de** f.

Définition 26.3 Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(\alpha x+\beta)=0$ on dit que la droite d'équation $y=\alpha x+\beta$ est **asymptote au graphe de** f **en** $+\infty$. Si $\lim_{x\to-\infty} f(x)-(\alpha x+\beta)=0$ on dit que la droite d'équation $y=\alpha x+\beta$ est **asymptote au graphe de** f **en** $-\infty$.

Proposition 26.1 *Si la droite d'équation $y=\alpha x+\beta$ est asymptote au graphe de f en $+\infty$ (respectivement $-\infty$) alors f admet comme direction asymptotique en $+\infty$ (respectivement $-\infty$) la direction $y=\alpha x$.*

Exemple 26.1 La fonction donnée par $f(x)=\ln(x)$ admet la direction asymptotique la droite d'équation $y=0$ en $+\infty$ mais n'admet pas d'asymptote en $+\infty$.

Remarque 26.1 Si la droite d'équation $y=\alpha x+\beta$ est asymptote au graphe de f en $+\infty$ et si $f(x)-(\alpha x+\beta)$ est positif (respectivement négatif) pour x arbitrairement grand alors le graphe de f est **au dessus** (respectivement **au dessous**) de cette droite en $+\infty$.

Exemple 26.2 Soit f définie par $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{x^2-x}{\sqrt{1+x^2}}$. Alors la droite d'équation $x=0$ est asymptote verticale au graphe de f en 0, la droite d'équation $y=x-1$ est asymptote au graphe de f en $+\infty$ alors que la droite d'équation $y=-x+1$ est asymptote au graphe de f en $-\infty$.

27 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 27.1 *(***Théorème des valeurs intermédiaires***) Soit f une fonction continue définie sur un intervalle I et soit a et b dans I. Alors pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un c compris entre a et b tel que $f(c)=\lambda$.*

Exemple 27.1 Soit $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ continue. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ alors il existe a et b tels que $f(a)<0<f(b)$. Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe c tel que $f(c)=0$.

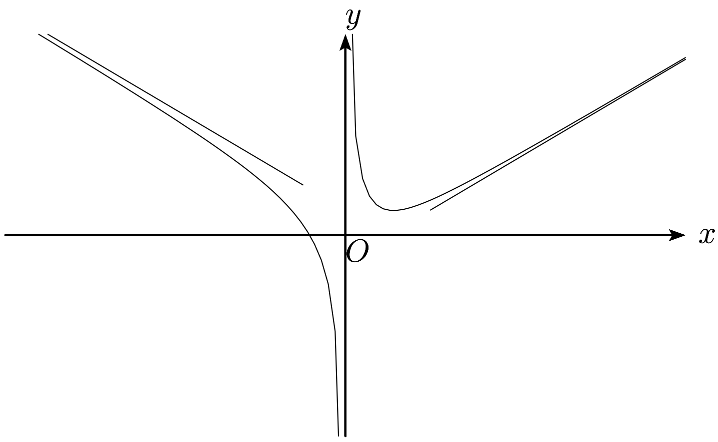


FIGURE 33 – Le graphe de $x \mapsto \dfrac{1}{x} + \dfrac{x^2 - x}{\sqrt{1+x^2}}$ et ses asymptotes

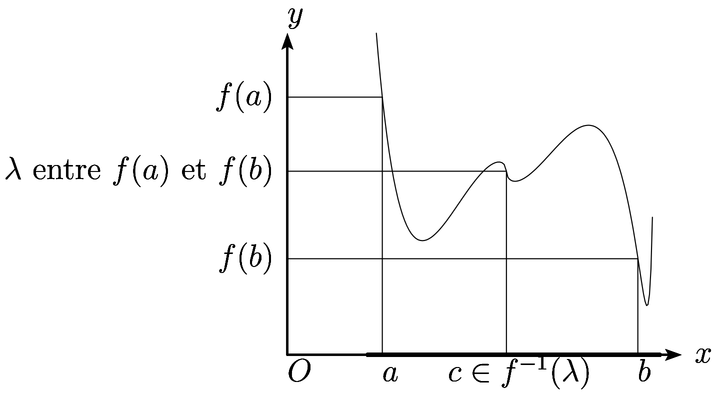


FIGURE 34 – Les valeurs intermédiaires

28 Prolongement par continuité

Définition 28.1 Soit $f : A \to \mathbf{R}$ et $a \in \mathbf{R} \setminus A$. On suppose qu'il existe $h > 0$ tel que $]a-h, a[$ et $]a, a+h[$ soient inclus dans A. S'il existe $l \in \mathbf{R}$ tel que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ alors on appelle **prolongement par continuité de** f **en** a la fonction g définie sur $A \cup \{a\}$ par $g(a) = l$ et si $x \in A$, $g(x) = f(x)$. La fonction g est continue en a.

Exemple 28.1 La fonction définie par $g(0) = 1$ et $g(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ si $x \neq 0$ est le prolongement par continuité en 0 de $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$.

Exemple 28.2 La fonction définie par $g(0) = 0$ et $g(x) = x\sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ est le prolongement par continuité en 0 de $x \mapsto x\sin(\frac{1}{x})$.

29 Monotonie et continuité, existence de réciproque

On déduit du théorème des valeurs intermédiaires la proposition suivante.

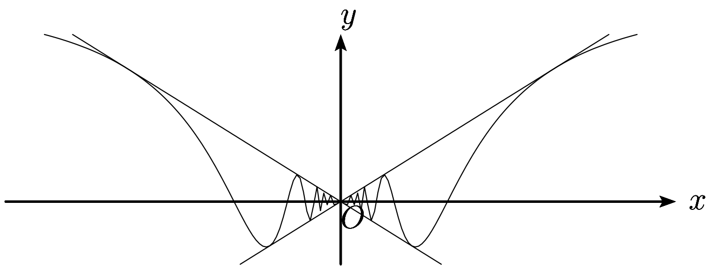


FIGURE 35 – Les graphes de $x \mapsto x\sin(\frac{1}{x})$, $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto -|x|$

Proposition 29.1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et continue. La fonction f est une bijection de I sur $f(I)$ si et seulement si f est strictement monotone. Si c'est une bijection, alors sa réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$ est aussi continue.*

Remarque 29.1 Les hypothèses f **continue** et I **intervalle** sont indispensables pour conclure.

Le théoèrme des valeurs intermédiaires permet aussi de caractériser, parmi les fonctions strictement monotones, les fonctions continues.

Proposition 29.2 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et strictement monotone. La fonction f est continue si et seulement si $f(I)$ est un intervalle.*

30 Image d'un segment par une fonction continue

Proposition 30.1 *Soit $f : A \to \mathbf{R}$ continue et $[a, b]$ un segment inclus dans A. Alors $f([a, b])$ est un segment. Plus précisément, il existe $\alpha, \beta \in [a, b]$ tels que $f([a, b]) = [f(\alpha), f(\beta)]$.*

Remarque 30.1 Les nombres α et β sont en général différents de a et b. Par exemple si f est définie par $f(x) = x(x^2 - 1)$ alors $f([-1, 1]) = [-\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}] = [f(-\frac{1}{\sqrt{3}}), f(\frac{1}{\sqrt{3})})]$ alors que $f(-1) = f(1) = 0$.

Quatrième partie

Dérivation d'une fonction

31 Dérivée en un point, dérivée

Définition 31.1 Soient $f : A \to \mathbf{R}$ et $a \in A$. On dit que f est **dérivable en** a si le **taux d'accroissement entre** x **et** a

$$x \in A \setminus \{a\} \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet une limite finie quand x tend vers a. Si f est dérivable en a on appelle **dérivée de** f **en** a et on note $f'(a)$ la limite du taux d'accroissement :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Si f est dérivable en tout point de A on dit que f est **dérivable** et la fonction f' ainsi définie sur A s'appelle **la dérivée de** f.

La dérivée d'une fonction f en un point a permet de donner une **approximation affine** de la fonction f quand x est proche de a.

Proposition 31.1 *Si f est dérivable en a alors*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - (f(a) + f'(a)(x - a))}{(x - a)} = 0.$$

Définition 31.2 Si f est dérivable en a la fonction affine $x \mapsto f(a) + f'(a)(x - a)$ s'appelle **l'approximation affine de** f **en** a**.**

Proposition 31.2 *Si f est dérivable en a et si $(\alpha, \beta) \neq (f(a), f'(a))$ alors*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - (f(a) + f'(a)(x - a))}{f(x) - (\alpha + \beta(x - a))} = 0.$$

Remarque 31.1 Cette proposition explique pourquoi la fonction affine $x \mapsto f(a)+f'(a)(x-a)$ s'appelle approximation affine de f en a.

La dérivée et le taux d'accroissement admettent l'interprétation cinématique suivante. Si $f(x)$ représente une position en fonction du temps x alors le taux d'accroissement entre x et a est *la vitesse moyenne* entre les temps a et x alors que la dérivée $f'(a)$ est *la vitesse instantannée* au temps a.

Exemples 31.1
- Les fonctions constantes sont dérivables de dérivée la fonction nulle.
- La fonction $x \mapsto ax$ est dérivable de dérivée la fonction constante a.
- La fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable de dérivée la fonction $x \mapsto 2x$.
- La valeur absolue n'est pas dérivable en 0.
- L'égalité $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ signifie que le sinus est dérivable en 0 et $\sin'(0) = 1$.

Proposition 31.3 *Si f est dérivable en a alors f est continue en a.*

Définition 31.3 Si f est dérivable et si f' est dérivable en a alors $(f')'(a)$ est notée $f''(a)$ et s'appelle **dérivée seconde** de f en a. Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. Si on peut dériver n fois la fonction f on dit que f est n **fois dérivable** et on note $f' = f^{(1)}, f'' = f^{(2)}, f''' = f^{(3)}, ..., f^{(n)}$ les dérivées successives. La fonction $f^{(n)}$ s'appelle **dérivée** n**-ème** de f.

Remarque 31.2 En cinématique, la dérivée seconde s'appelle **accélération**.

Notation 31.1 Les dérivées $f' = f^{(1)}, f'' = f^{(2)}, f''' = f^{(3)}, ..., f^{(n)}$ sont aussi notées

$$\frac{df}{dx}, \frac{d^2f}{dx^2}, \frac{d^3f}{dx^3}, ..., \frac{d^nf}{dx^n}.$$

En appliquant la proposition précédente aux dérivées successives de f on obtient

Proposition 31.4 *Si f est n fois dérivable alors $f, f', ..., f^{(n-1)}$ sont continues.*

32 Droite tangente au graphe d'une fonction en un point

Définition 32.1 Si f est une fonction définie sur un intervalle qui contient les deux points a et b on appelle **sécante au graphe de** f **qui passe par** $(a, f(a))$ **et** $(b, f(b))$ la droite qui passe par ces deux points. C'est la droite d'équation

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Définition 32.2 Si f est une fonction dérivable en a on appelle **droite tangente au graphe de** f **en** $(a, f(a))$ la droite d'équation

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

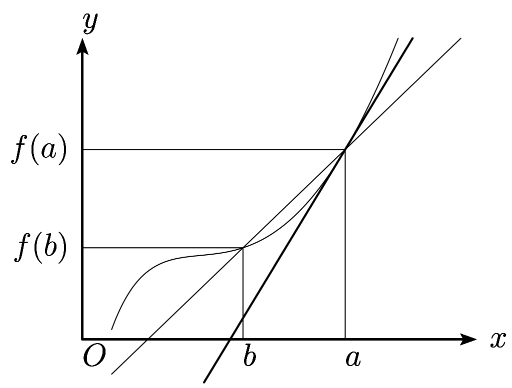


FIGURE 36 – Tangente en $(a, f(a))$ et sécante au graphe de f entre les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$

La droite tangente est en un *certain sens* la limite des sécantes qui passent par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ lorsque b tend vers a. C'est aussi, parmi les droites qui passent par $(a, f(a))$ celle qui *s'approche le plus* du graphe de f.

33 Règles algébriques

Proposition 33.1 *Soient f et g deux fonctions définies sur A et $a \in A$. On suppose que f et g sont dérivables en a de dérivées $f'(a)$ et $g'(a)$. Alors*

— *la fonction $f+g$ est dérivable en a et*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$

— *la fonction fg est dérivable en a et*

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \text{ (\textbf{Règle de Leibniz})},$$

— *si g ne s'annule pas la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

On déduit de ces règles le calcul de la dérivée d'un polynôme ou d'une fraction rationnelle.

Proposition 33.2 *Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. La dérivée du polynôme*

$$P = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

est le polynôme

$$P' = n a_n x^{n-1} + \ldots + a_1.$$

Proposition 33.3 *La dérivée de la fraction rationnelle*

$$R = \frac{P}{Q}$$

est la fraction rationnelle

$$R' = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}.$$

Exemple 33.1 Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. La dérivée de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ est la fonction $x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$.

34 Dérivée d'une composée et dérivabilité de la réciproque

Proposition 34.1 *Soient $f : A \to B$ et $g : B \to \mathbf{R}$ deux fonctions et $a \in \mathbf{R}$. Si f est dérivable en a et g en $f(a)$ alors la composée $g \circ f$ est dérivable en a et*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Exemple 34.1 Si $n \in \mathbf{N}$, la dérivée de la fonction $x \mapsto (1+x^2)^n$ est la fonction $x \mapsto 2nx(1+x^2)^{n-1}$.

Remarque 34.1 On déduit de cette proposition que la réciproque d'une fonction dérivable dont la dérivée s'annule n'est pas dérivable. La proposition suivante indique que c'est la seule obstruction.

Proposition 34.2 *Soit $f : A \to B$ une fonction dérivable et bijective. On suppose que $f'(x) \neq 0$ en tout point $x \in A$. Alors la fonction réciproque de f, $f^{-1} : B \to A$, est dérivable et*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}, \text{ si } y \in B.$$

Exemples 34.2 Si $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ alors la fonction définie de $]0, +\infty)$ dans $]0, +\infty)$ par $f(x) = x^n$ est une bijection dérivable et sa dérivée ne s'annule pas. Par conséquent, sa réciproque, la fonction $y \mapsto \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}$ est dérivable et si $y \in]0, +\infty)$ alors

$$(y^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n(y^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}.$$

Par le résultat de dérivation des composées on déduit alors que si $r \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$ alors la fonction définie de $]0, +\infty)$ dans $]0, +\infty)$ par $f(x) = x^r$ est dérivable et si $x \in]0, +\infty)$ alors

$$(x^r)' = r y^{r-1}.$$

35 Quelques exemples classiques

Proposition 35.1 *Les fonctions* sin, cos, tan, arcsin, arccos, *et* arctan *sont dérivables et*

$$\begin{array}{ccc} \sin' = \cos & \cos' = -sin & \tan' = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2 \\ \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \end{array}.$$

Proposition 35.2 *Les fonctions* ln *et* exp *sont dérivables et*

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}, \exp' = \exp.$$

Proposition 35.3 *Si $\lambda \in \mathbf{R}$ alors la fonction définie de $]0, +\infty)$ dans $]0, +\infty)$ par $f(x) = x^\lambda$ est dérivable et*

$$(x^\lambda)' = \lambda y^{\lambda - 1}.$$

Proposition 35.4 *Les fonctions* sinh, cosh, tanh, argsh, argch, argth *sont dérivables et*

$$\begin{array}{ccc} \sinh' = \cosh & \cosh' = \sinh & \tanh' = \frac{1}{\cosh^2} = 1 - \tanh^2 \\ \operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & \operatorname{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} & \operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2} \end{array}.$$

36 Théorème des accroissements finis

Théorème 36.1 *(***Théorème des accroissements finis***) Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et soient $a < b$ deux points de I. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Remarque 36.1 La conclusion reste vraie en supposant seulement f *continue sur I et dérivable sur $]a, b[$.*

Ce théorème admet l'interprétation géométrique suivante. La sécante au graphe d'une fonction dérivable f entre deux points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ est parallèle à une tangente en un point *intermédiaire* $(c, f(c))$.

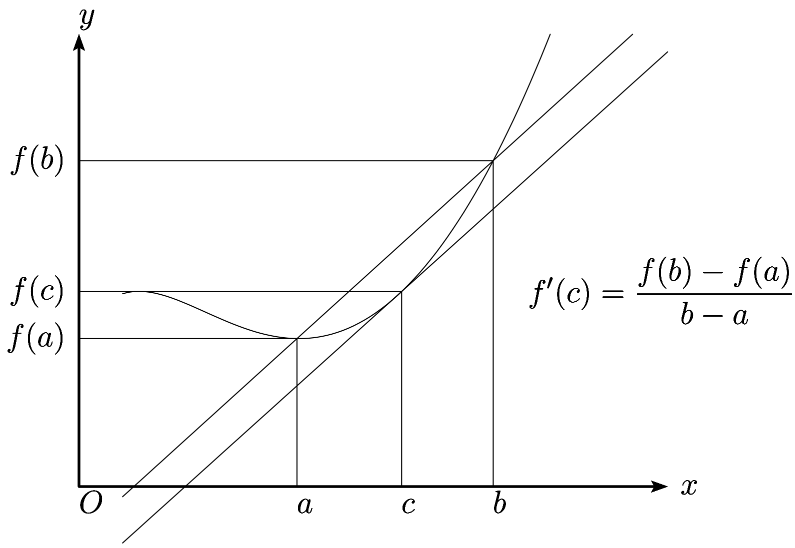


FIGURE 37 – Sécante entre $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ et tangente en $(c, f(c))$ parallèles

Exemple 36.1 La fonction définie sur $]0, +\infty)$ par $f(x) = (\exp(x-2)-1)\ln(x)$ est dérivable et s'annule en 1 et en 2. Par conséquent, il existe c entre 1 et 2 tel que $f'(c) = 0$.

Ce théorème admet l'interprétation cinématique suivante. Lors d'un mouvement la vitesse moyenne entre les temps a et b coïncide au moins une fois avec la vitesse instantanée entre a et b.

Proposition 36.1 *Soit f dérivable. Si f est croissante (respectivement décroissante) alors f' est positive (respectivement négative).*

Proposition 36.2 *Soit f définie sur un intervalle I et dérivable. Si f' est strictement positive (respectivement strictement négative) alors f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante).*

Remarque 36.2 Ces deux propositions ne sont pas réciproques l'une de l'autre. Par exemple la fonction $x \mapsto x^3$ est dérivable, strictement croissante et sa dérivée s'annule en 0. Dans le second cas il est important de supposer que le domaine est un intervalle. Par exemple la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui est définie sur $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ n'est pas décroissante alors que sa dérivée est strictement négative.

Remarque 36.3 Il découle de ces propositions que les variations d'une fonction dérivable se déduisent du signe de sa dérivée.

Proposition 36.3 *Soit I un intervalle, $a \in I$ et f continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$. Si $\lim_{x\to a} f'(x)$ existe et est finie alors f est dérivable en a et*

$$f'(a) = \lim_{x\to a} f'(x).$$

37 Extrema, points stationnaires, points d'inflexion, convexité et concavité

Définition 37.1 Soit $f : A \to \mathbf{R}$ dérivable en a. On dit que a est un **point stationnaire** si $f'(a) = 0$.

Définition 37.2 Soit $f : A \to \mathbf{R}$. On dit que f admet un **maximum global** en a (respectivement **minimum global**) si $f(x) \leq f(a)$ (respectivement $f(x) \geq f(a)$) pour tout $x \in A$.

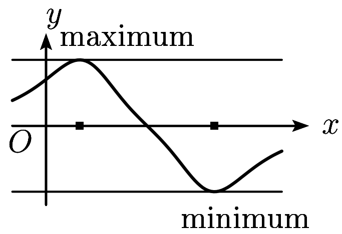


FIGURE 38 – Maximum et minimun globaux

Définition 37.3 Soit $f : A \to \mathbf{R}$. On dit que f admet un **maximum local** en a (respectivement **minimum local**) s'il existe un intervalle I ouvert qui contient a tel que $f(x) \leq f(a)$ (respectivement $f(x) \geq f(a)$) pour tout $x \in I \cap A$.

Définition 37.4 On dit que f admet un **extremum global** (respectivement **local**) en a si elle admet un maximum ou un mininum global (respectivement local) en ce point .

Exemple 37.1 Soit f la fonction définie sur $[-2, +\infty)$ par $f(x) = x^3 - 3x$. Alors f admet un minimum global en -2 et 1 et elle admet en -1 un maximum local qui n'est pas un maximum global. La fonction f ne possède pas de maximum global.

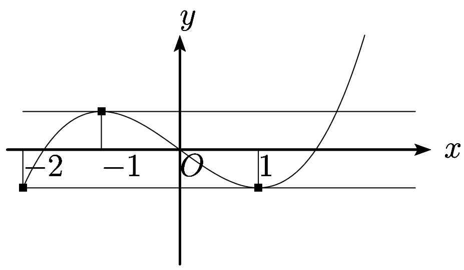


FIGURE 39 – Extrema

Proposition 37.1 *Soit $f : A \to \mathbf{R}$ et $a \in A$. On suppose qu'il existe un intervalle ouvert inclus dans A et qui contient a et que f est dérivable en a. Si f admet un extremum local en a alors ce point est stationnaire : $f'(a) = 0$.*

Exemples 37.2 La fonction dérivable définie par $f(x) = 1 - x^2$ admet un extremum local en 0. Par conséquent $f'(0) = 0$: c'est un point stationnaire. En revanche 0 est un point stationnaire de la fonction dérivable x^3 qui ne possède aucun extrum local.

Proposition 37.2 *Si f est deux fois dérivable en un point stationnaire a et si $f''(a) < 0$ (respectivement $f''(a) > 0$) alors f admet un maximum local en a (respectivement minimum local).*

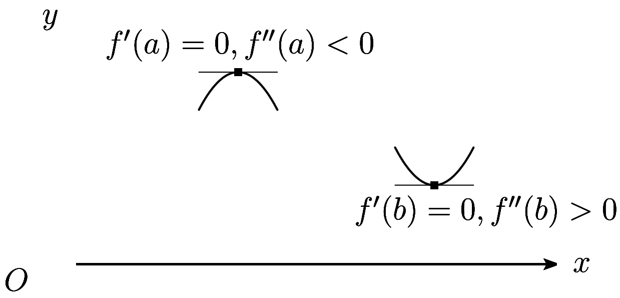


FIGURE 40 – Nature de l'extremum local en fonction de la dérivée seconde

Définition 37.5 On dit que $(a, f(a))$ est **un point d'inflexion** du graphe de f si le graphe de f **coupe** sa tangente en ce point : la fonction $f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$ s'annule et change de signe en a.

Proposition 37.3 *Supposons que f soit trois fois dérivable en a et que $f''(a) = 0$ et $f^{(3)}(a) \neq 0$. Alors $(a, f(a))$ est un point d'inflexion du graphe de f : le graphe de f* **coupe** *sa tangente en ce point et la fonction $f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)$ s'annule et change de signe en a. Si $f^{(3)}(a) > 0$ elle est négative pour $x < a$ et proche de a puis positive pour $x > a$ et proche de a. Si $f^{(3)}(a) < 0$ elle est positive pour $x < a$ et proche de a puis négative pour $x > a$ et proche de a.*

Exemple 37.3 Le point $(0, 0)$ est un point d'inflexion du graphe du sinus car $\sin''(0) = 0$ quand $\sin'''(0) = -1$.

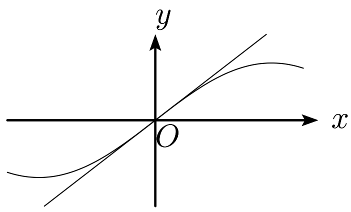


FIGURE 41 – L'inflexion du graphe du sinus en $(0, 0)$

Proposition 37.4 *Soit f une fonction définie et de classe C^2 sur un intervalle I. Si la dérivée seconde f'' ne s'annule pas alors elle est de signe constant sur I et pour tout $a \in I$ la tangente au graphe de f en $(a, f(a))$ ne coupe le graphe qu'en $(a, f(a))$. Si $f'' > 0$ alors le graphe de f est au dessus de ses tangentes et on dit que f est* **convexe**. *Si $f'' < 0$ alors le graphe de f est au dessous de ses tangentes et on dit que f est* **concave**.

38 Règle de L'hospital

Proposition 38.1 *Soient f et g deux fonctions dérivables définies sur un intervalle ouvert I et $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ une des extrémités de l'intervalle. On suppose que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ ou que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = +\infty$. Si de plus $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe alors $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe et*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Remarque 38.1 Puisque $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ est supposée exister c'est que le quotient $\frac{f'}{g'}$ est défini sur I et donc que g' ne s'annule pas sur I.

Remarque 38.2 Deux fonctions sont dites de **même ordre de grandeur en** a si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. D'après la règle de L'hospital, si f, g, f' et g' sont définies et continues en a et vérifie $f(a) = g(a) = 0$ alors f et g sont de même ordre de grandeur en a dès que f' et g' le sont.

Remarque 38.3 Supposons que f, g, f' et g' soient définies et continues en a, que que $f(a) = g(a) = 0$ et que $g'(a) \neq 0$. On a donc $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{x-a}$ et , $g'(a) = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{x-a} \neq 0$. De plus, puisque f' et g' sont supposées continues en a, on a $\lim_{x\to a} f'(x) = f(a)$ et $\lim_{x\to a} g'(x) = g'(a)$. Ainsi, par la règle de la limite d'un quotient on retrouve les conclusions de L'hospital :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exemple 38.1 En appliquant la règle de L'hospital on montre que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin(x)} = 1.$$

Exemple 38.2 Soit f une fonction fonction n fois dérivable telle que $f^{(n)}$ est continue en 0. Si $f(0) = ... = f^{(n-1)}(0) = 0$ alors en appliquant $n-1$ fois la règle de L'hospital on montre que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

39 Plan d'étude d'une fonction numérique

Voici les étapes essentielles dans l'étude d'une fonction numérique d'une variable réelle.

— Recherche du domaine de f
— Réduction du domaine en fonction de la périodicite, de la parité ou d'autres symétries
— Continuité, dérivabilité de f
— Signe de la dérivée
— Limites de f aux bords du domaine de f
— Résumé sous forme d'un tableau de variation
— Recherche des asymptotes éventuelles
— étude des points stationnaires et des points d'inflexion
— Représentation garphique de f

Cinquième partie
Intégration et primitives

40 Primitive

Définition 40.1 Une **primitive** d'une fonction f est une fonction dérivable F dont la dérivée est f.

D'un point de vue cinématique, la fonction f représente une vitesse en fonction du temps et la différence $F(b) - F(a)$ représente la distance comptée algébriquement entre les positions aux temps a et b.

Exemples 40.1 La fonction $x \mapsto x^2 + 4x - 5$ est une primitive de $x \mapsto 2x + 4$. La fonction ln est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty)$. La fonction $x \mapsto 2 + \arcsin(x)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $[-1, 1]$. La fonction $x \mapsto x|x|$ est une primitive de $x \mapsto 2|x|$.

Proposition 40.1 *Soit F une primitive de f sur un intervalle I, si G est une primitive de f sur I il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que $G = c + F$.*

41 Quelques primitives classiques

la fonction f	une primitive F
$x \mapsto x^\lambda$, $\lambda \neq -1$	$x \mapsto \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1}$
$x \mapsto \frac{1}{x} = x^{-1}$	$x \mapsto \ln(\|x\|)$
$x \mapsto \exp(\lambda x)$, $\lambda \neq 0$	$x \mapsto \frac{1}{\lambda}\exp(\lambda x)$
cos	sin
sin	$-\cos$
tan	$-\ln(\|\cos\|)$
cosh	sinh
sinh	cosh
tanh	ln(cosh)
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	arcsin ou $-$ arccos
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	arctan
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x \mapsto \operatorname{argch}(x)$ ou $\ln\|x + \sqrt{x^2-1}\|$ suivant le domaine
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$x \mapsto \operatorname{argsh}(x)$ ou $\ln(x + \sqrt{x^2+1})$
$x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$	$x \mapsto \operatorname{argth}(x)$ ou $\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{1+x}{1-x}\right\|$ suivant le domaine

L'existence d'une formule exacte à l'aide de fonctions usuelles et qui fournit une primitive d'une fonction donnée n'est pas possible en général. Cependant, quand la fonction de départ est assez simple on essaie par des manipulations algébriques de se ramener à des primitives de fonctions appartenant à la liste précédente.

Exemple 41.1 Considérons la fonction f donnée par $f(x) = \frac{2}{x(x-1)(x+1).}$ Pour trouver une primitive de f il suffit d'observer que $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x}$. Sous cette forme on obtient que

$$F(x) = \ln(|x-1|) + \ln(|x+1|) - 2\ln(|x|) = \ln\left(\left|\frac{(x-1)(x+1)}{x^2}\right|\right) = \ln\left(\left|1 - \frac{1}{x^2}\right|\right)$$

est une primitive de f.

42 Intégrale

L'objet initial de la théorie de l'intégration est de fournir un cadre mathématique rigoureux au calculs des longueurs, des aires et des surfaces. On commence par s'intéresser à l'aire délimitée par la graphe d'une fonction définie sur un segment $[a, b]$. Pour la comprendre on va l'approximer (dans un sens à préciser) par une somme d'aires de rectangles de bases égales mais de hauteurs variables. Les bases de ces rectangles divisent régulièrement le segment $[a, b]$.

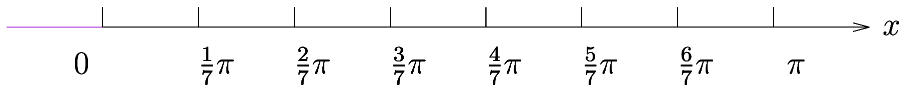


FIGURE 42 – Division du segment $[0, \pi]$ en 7 intervalles de longueur $\frac{\pi}{7}$

Définition 42.1 Soient une fonction continue f et un segment $[a, b]$ inclus dans le domaine de f. Si $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ on pose

$$I_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + \frac{b-a}{n}k).$$

La somme I_n s'appelle **somme de Riemann** associée à f. Si la limite $\lim_{n \to +\infty} I_n$ existe et appartient à $\mathbf{R}$ alors on appelle cette limite **intégrale de f entre a et b** et on la note

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Théorème 42.1 *Dès que la fonction f est continue sur un intervalle borné et fermé I, si $a \in I$ et $b \in I$, alors l' intégrale de f entre a et b existe.*

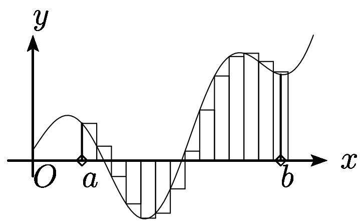


FIGURE 43 – Une fonction continue f et une approximation en escaliers sur un segment $[a, b]$

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ **représente l'aire comptée algébriquement** comprise entre la courbe représentative de f, l'axe des x et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. Pour définir mathématiquement cette aire on *approxime* la fonction f par une fonction **en escaliers** f_n qui vaut $f(a + \frac{b-a}{n}k)$ sur les intervalles $[a + \frac{b-a}{n}k, a + \frac{b-a}{n}(k+1)]$, $k = 0, ..., n-1$. L'aire associée à f_n est I_n :

$$I_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + \frac{b-a}{n}k) = \int_a^b f_n(x)dx.$$

On considère que I_n approxime l'aire associée à f.

Exemple 42.1 Soient $f(x) = x, a = 0, b = 1$. Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. On a

$$I_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} = \frac{1}{n^2} \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n})$$

et donc

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = \frac{1}{2} = \int_0^1 x dx.$$

Définition 42.2 Si $\int_a^b f(x)dx$ est définie on pose $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

43 Premières propriétés

Proposition 43.1 (**linéarité de l'intégrale**) *Soient f et g continues sur un intervalle I, $a, b \in I$ et $\lambda \in \mathbf{R}$.*

— $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

— $\int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$

Proposition 43.2 (**comparaison à** 0) *Soit f continue sur un intervalle I et soit $[a, b] \subset I$.*

— *Si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$*

— *Si $f(x) \leq 0$ pour tout $x \in [a, b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq 0$*

On déduit de cette proposition les inégalités suivantes.

Proposition 43.3 *Soient f et g continues sur un intervalle I, $[a, b] \subset I$ et $m \leq M \in \mathbf{R}$.*

— *Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$* (**comparaison**)

— *Si $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$ alors*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \quad \textbf{(Inégalité de la moyenne)}$$

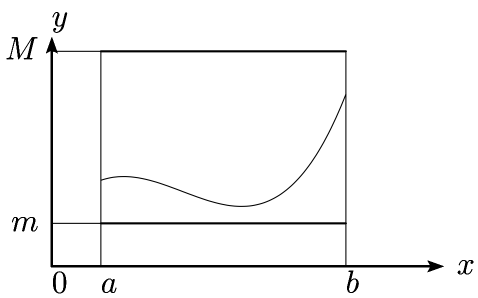


FIGURE 44 – Les aires $m(b-a)$ et $M(b-a)$ encadrent l'aire $\int_a^b f(x)dx$

Définition 43.1 Le nombre $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ s'appelle **valeur moyenne de f sur le segment** $[a,b]$.

Si on applique le théorème des accroissements finis on obtient le résultat suivant.

Proposition 43.4 (**propriété de la valeur moyenne**) *Soient f continue sur un intervalle I et $a \neq b \in I$. Alors il existe c entre a et b tel que*

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

En d'autres termes la valeur moyenne de f sur $[a,b]$ est prise au moins une fois.

Proposition 43.5 *Soit f continue sur un intervalle I et soit $a, b, c \in I$. Alors*

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \quad (\textbf{Relation de Chasles}).$$

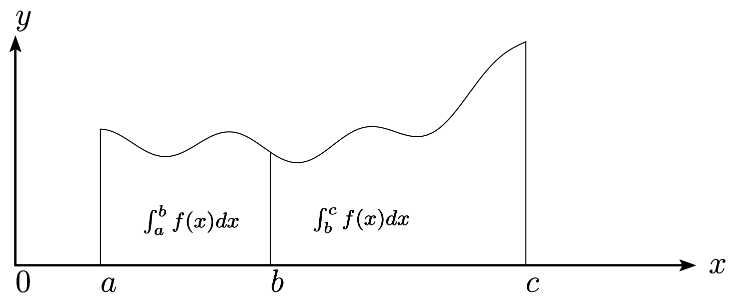


FIGURE 45 – La relation de Chasles d'addition des aires

44 Intégrales et primitives

Théorème 44.1 *Soient f une fonction continue sur un intervalle I, $a \in I$ et $x \in I$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^x f(t)dt := F(x)$ est une primitive de f sur I.*

De plus pour tout $b \in I$ et toute primitive G de f sur I on a $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = G(b)-G(a) = [G(x)]_a^b$.

Exemple 44.1 Soient $f(x) = x, a = 0, b = 1$. Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. On a vu précédemment que

$$I_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n} = \frac{1}{n^2}\frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{n})$$

et donc

$$\int_0^1 xdx = \lim_{n\mapsto+\infty} I_n = \frac{1}{2} = [\frac{x^2}{2}]_0^1.$$

Notation 44.1 Si F est une fonction et $[a,b]$ est inclus dans le domaine de F on pose $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$ et $F(a) - F(b) = [F(x)]_b^a$.

Définition 44.1 Soient f une fonction continue sur un intervalle I, $a \in I$ et $x \in I$ on appelle la primitive $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ qui s'annule en a **intégrale fonction de sa borne supérieure**.

45 Intégrales impropres

Définition 45.1 Soit f continue sur un intervalle ouvert $I =]A, B[$ (avec A et B dans $\mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$) et soit a dans I. Si la limite $\lim_{b \to B} \int_a^b f(x)d(x)$ existe et appartient à $\mathbf{R}$ on appelle cette limite **intégrale impropre de f sur** $[a, B[$ et on la note $\int_a^B f(x)d(x)$. De même si la limite $\lim_{b \to A} \int_b^a f(x)d(x)$ existe et appartient à $\mathbf{R}$ on appelle cette limite **intégrale impropre de f sur** $]A, a]$ et on la note $\int_A^a f(x)d(x)$. Enfin si les intégrales impropres $\int_a^B f(x)d(x)$ et $\int_A^a f(x)d(x)$ existent on pose $\int_A^B f(x)d(x) = \int_A^a f(x)d(x) + \int_a^B f(x)d(x)$ et ceci définit **l'intégrale impropre de f sur** $]A, B[$.

Exemple 45.1 On a $\int_1^b \frac{1}{x^2}dx = 1 - \frac{1}{b}$ qui tend vers 1 quand b tend vers $+\infty$ mais qui tend vers $-\infty$ quand b tend vers 0. Par conséquent on a $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = 1$ mais l'intégrale impropre de $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur $]0, 1]$ n'est pas définie.

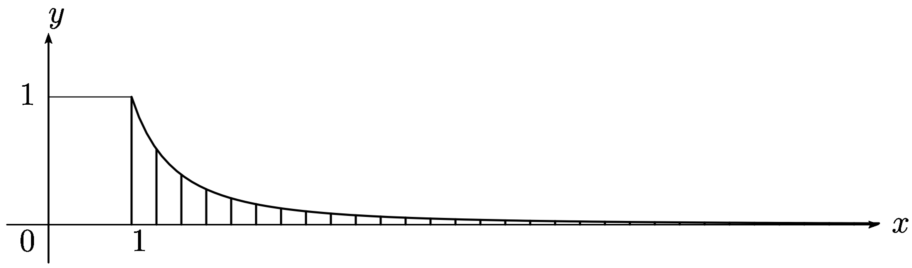


FIGURE 46 – L'aire $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ est égale à 1

Théorème 45.1 *Soient f et g continues sur $]A, B[$ et $a \in]A, B[$. On suppose que $|f| \leq g$. Si g possède une intégrale impropre sur $[a, B[$ (respectivement $]A, a]$) alors f en possède également et*

$$\left| \int_a^B f(x)d(x) \right| \leq \int_a^B g(x)d(x)$$

(respectivement $\left| \int_A^a f(x)d(x) \right| \leq \int_A^a g(x)d(x)$).

Exemple 45.2 La fonction $x \mapsto |\frac{\sin(x)}{x^2}|$ est majorée sur $[2\pi, +\infty)$ par la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ et $\int_{2\pi}^\infty \frac{1}{x^2}dx$ existe et vaut $\frac{1}{2\pi}$. Par conséquent $\int_{2\pi}^\infty \frac{\sin(x)}{x^2}dx$ existe et est compris entre $-\frac{1}{2\pi}$ et $\frac{1}{2\pi}$.

La définition suivante généralise encore un peu plus la notion d'intégrale.

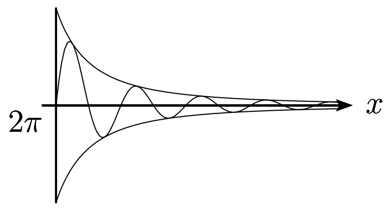


FIGURE 47 – Les fonctions $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ et $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ sur $[2\pi, +\infty)$

Définition 45.2 Soient $f$une fonction et $a = a_0, a_1, ..., a_n, a_{n+1} = b$ des réels. Si pour $i = 1, ..., n$ l'intégrale (éventuellement impropre) $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx$ est définie alors on définit $\int_a^b f(x)dx$ par

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx.$$

à l'exception de la propriété de la valeur moyenne et de l'existence de primitive, toutes les propriétés vues précédemment (linéarité, comparaison, inégalité de la moyenne, relation de Chasles) restent vraies pour cette généralisation des intégrales.

Exemple 45.3 La fonction *en escaliers* f définie sur $[0, 2]$ par $f(x) = 1$ si $x \in [0, 1[$ et $f(x) = 2$ si $x \in [1, 2]$ vérifie

$$\int_0^2 f(x)dx = 3.$$

La fonction f n'a pas de primitive et la propriété de la valeur moyenne n'est pas vérifiée car $f(x) \neq \frac{3}{2}$ si $x \in [0, 2]$.

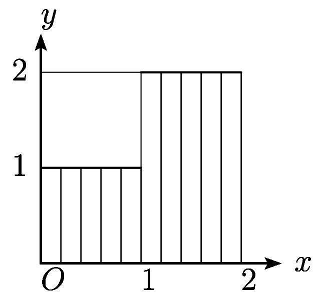


FIGURE 48 – Intégrale d'une fonction en escalier (deux marches)

46 Trois méthodes d'intégration

Définition 46.1 Soit f une fonction définie sur un intervalle I, continue et dérivable. Si f ne s'annule pas sur I on appelle **dérivée logarithmique de** f la fonction $\frac{f'}{f}$.

Proposition 46.1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I, continue et dérivable. Si f ne s'annule pas sur I alors la fonction* $\ln(|f|)$ *est une primitive de la dérivée logarithmique* $\frac{f'}{f}$ *:*

$$(\ln(|f|))' = \frac{f'}{f}.$$

Exemple 46.1 La fonction $\ln(1+x^2+\sin(x))$ est une primitive de la fonction $\frac{2x+\cos(x)}{1+x^2+\sin(x)}$.

Proposition 46.2 Intégration par parties *Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et dont les dérivées f' et g' sont continues. Si $[a,b] \subset I$ alors*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

avec $[f(x)g(x)]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$.

Exemple 46.2 Le calcul de $\int_0^\pi x\sin(x)dx$ se fait par intégration par parties. On prend $f(x) = x$ et $g = -\cos$. On a donc $f' = 1$ et $g' = \sin$. Ceci donne

$$\int_0^\pi x\sin(x)dx = [-x\cos(x)]_0^\pi + \int_0^\pi \cos(x) = [\sin(x) - x\cos(x)]_0^\pi = \pi.$$

Proposition 46.3 Changement de variable *Soient I et J deux intervalles de $\mathbf{R}$, $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue et $\phi : J \to I$ une fonction dérivable et dont la dérivée est continue. Alors pour $\alpha, \beta \in J$ on a*

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\phi(u))\phi'(u)du.$$

Exemple 46.3 Le calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(u)\cos(u)du$ se fait par un changement de variable. On pose ici $f(t) = t^2$ et $\phi = \sin$. On a $\phi' = \cos$, $\phi(\frac{\pi}{2}) = 1$ et $\phi(0) = 0$. Par conséquent

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(u)\cos(u)du = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}.$$

Exemple 46.4 On veut calculer l'aire comprise entre le demi-cercle unité supérieur, l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$. Or le demi-cercle supérieur est le graphe de la fonction $\sqrt{1-t^2}$. On doit donc calculer $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-t^2}dt$. Ce calcul se fait par un changement de variable.

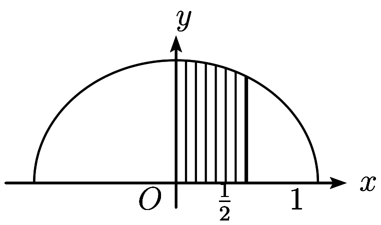


FIGURE 49 – Aire d'une portion de disque

On pose ici $\phi = \cos$. On a $\phi' = -\sin$, $\phi(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ et $\phi(\frac{\pi}{2}) = 0$. Par conséquent, puisque $\sin(u) = \sqrt{1-\cos^2(u)}$ si $u \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$, on a

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-t^2}dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} -\sin^2(u)du = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(u)du = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2u)}{2}du = [\frac{u}{2} - \frac{\sin(2u)}{4}]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

47 Longueur d'une courbe, aire d'une surface de révolution

Longueur dune courbe Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I et dont la dérivée est continue. Soit $[a, b] \subset I$ et $t \in]0, b-a[$. On note N_t la partie entière de $\frac{b-a}{t}$ et si $k = 0, ..., N_t + 1$ on pose $a_k = a + kt$. Sur chaque intervalle $[a_k, a_{k+1}]$ (avec $k = 0, ..., N_t$) on approxime f par son approximation affine $x \mapsto f(a_k) + f'(a_k)(x - a_k)$. D'après le théorème de Pythagore, la longueur du segment de droite $x \in [a_k, a_{k+1}] \mapsto f(a_k) + f'(a_k)(x - a_k)$ est égale à $(a_{k+1} - a_k)\sqrt{1 + f'(a_k)^2}$ ou encore $t\sqrt{1 + f'(a_k)^2}$ car $(a_{k+1} - a_k) = t$. De plus la somme $L_t = t\sum_{k=0}^{N_t} \sqrt{1 + f'(a_k)^2}$ tend vers $\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx$ lorsque t tend vers 0.

Définition 47.1 La **longueur de la courbe** $\gamma : t \in [a, b] \mapsto (t, f(t))$ est

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx.$$

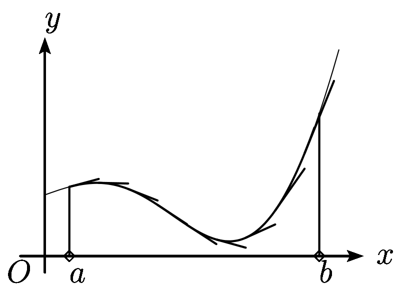


FIGURE 50 – Approximation d'une courbe par des *segments de droites tangentes*

Exemple 47.1 Appliquons cette définition à la fonction définie par $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ avec $-r < a < b < r$. Puisque le graphe de cette fonction est le demi-cercle supérieur de rayon r centré à l'origine on va calculer la longueur de la portion du demi cercle comprise entre $x = a$ et $x = b$. On a $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$ et donc $\sqrt{1 + f'(x)^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}$. Par conséquent on obtient

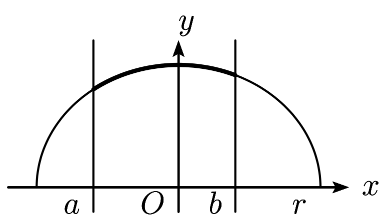


FIGURE 51 – Portion de cercle

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx = \int_a^b \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}dx = r(\arccos(\frac{a}{r}) - \arccos(\frac{b}{r})).$$

Ceci correspond bien à la longueur attendue de la portion du demi cercle comprise entre $x = a$ et $x = b$.

Exemple 47.2 La longueur $l(a,b)$ de l'arc de parabole d'équation $y = x^2$ avec $x \in [a,b]$ est

$$l(a,b) = \int_a^b \sqrt{1+4x^2}dx.$$

En posant $2x = \sinh(t)$ on obtient

$$l(a,b) = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{argsh}(2a)}^{\mathrm{argsh}(2b)} \cosh^2(t)dt = \frac{1}{4}\int_{\mathrm{argsh}(2a)}^{\mathrm{argsh}(2b)} \cosh(2t)+1dt = \left[\frac{\sinh(2t)+2t}{8}\right]_{\mathrm{argsh}(2a)}^{\mathrm{argsh}(2b)}.$$

Exemple 47.3 La longueur $l(a,b)$ de l'arc de *chaînette* $y = \cosh(x)$ avec $x \in [a,b]$ (c'est le nom du graphe du cosinus hyperbolique car on peut démontrer que c'est la forme d'une chaînette fixée en deux points sous l'action de la pesanteur) est

$$l(a,b) = \int_a^b \sqrt{1+\sinh^2(x)}dx = \int_a^b \cosh(x)dx = \sinh(b)-\sinh(a).$$

Aire d'une surface de révolution On conserve les notations précédentes ($f, [a,b], t$ et N_t) et on suppose la fonction f positive. Considérons la surface de révolution définie par

$$(h,\theta) \in [a,b]\times[0,2\pi] \mapsto (\cos(\theta)f(h), \sin(\theta)f(h), h).$$

De la même façon qu'on approxime la longueur d'un petit morceau de courbe par la longueur

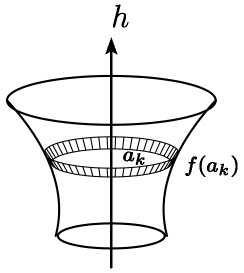


FIGURE 52 – Surface de révolution

d'un segment on peut approximer l'aire de la portion de surface de révolution comprise entre les hauteurs a_k et a_{k+1} par $2\pi f(a_k)t\sqrt{1+f'(a_k)^2}$. Or la somme $S_t = t\sum_{k=0}^{N_t} 2\pi f(a_k)\sqrt{1+f'(a_k)^2}$ tend vers $\int_a^b 2\pi f(h)\sqrt{1+f'(h)^2}dh$ lorsque t tend vers 0.

Définition 47.2 L'**aire de la surface de révolution** $(h,\theta) \in [a,b]\times[0,2\pi] \mapsto (\cos(\theta)f(h), \sin(\theta)f(h), h)$ est

$$\int_a^b 2\pi f(h)\sqrt{1+f'(h)^2}dh.$$

Exemple 47.4 Appliquons cette définition à la fonction donnée par $f(h) = \lambda h$ pour $h > 0$ avec $\lambda > 0$. Puisque le graphe de cette fonction est une demi-droite qui arrive à l'origine, par révolution il engendre un cône de révolution. On va donc pouvoir calculer l'aire de la portion de cône comprise entre $h = a > 0$ et $h = b > 0$ en appliquant la formule précédente. On obtient

$$\int_a^b 2\pi f(h)\sqrt{1+f'(h)^2}dh = \int_a^b 2\pi\lambda h\sqrt{1+\lambda^2}dh = \pi\lambda\sqrt{1+\lambda^2}(b^2-a^2).$$

Ceci correspond bien à l'aire attendue de la portion de cône comprise entre $h = a$ et $h = b$.

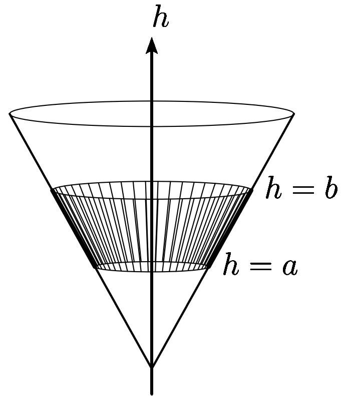


Figure 53 – Portion de cône

Exemple 47.5 Appliquons cette définition à la fonction donnée par $f(h) = \sqrt{r^2 - h^2}$ avec $-r < a < b < r$. Puisque le graphe de cette fonction est un demi-cercle de rayon r centré à l'origine, par révolution il engendre une sphère de rayon r. On va donc pouvoir calculer l'aire de la portion de sphère comprise entre $h = a$ et $h = b$ en appliquant la formule précédente. On

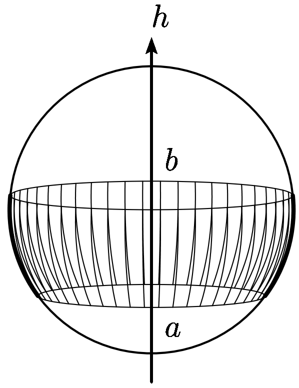


Figure 54 – Portion de sphère

obtient

$$\int_a^b 2\pi f(h)\sqrt{1 + f'(h)^2}dh = \int_a^b 2\pi r dh = 2\pi r(b - a).$$

Ceci correspond bien à l'aire attendue de la portion de sphère comprise entre $h = a$ et $h = b$.

Exemple 47.6 Soient $0 < r < R$. Considérons un cercle vertical de rayon r dont le centre est à une distance R de l'axe Oh. En faisant tourner ce cercle autour de l'axe vertical, on engendre un tore. On obtient donc ce tore par révolution des graphes des fonctions données par $f(h) = R + \sqrt{r^2 - h^2}$ et $g(h) = R - \sqrt{r^2 - h^2}$ sur $[-r, r]$. On a

$$f(h)\sqrt{1 + f'(h)^2} + g(h)\sqrt{1 + g'(h)^2} = \frac{2Rr}{\sqrt{r^2 - h^2}}.$$

Par conséquent en appliquant la formule précédente à ces deux fonctions on obtient que l'aire du tore est égale à

$$\int_{-r}^{r} 2\pi \left[f(h)\sqrt{1 + f'(h)^2} + g(h)\sqrt{1 + g'(h)^2}\right] dh = \int_{-r}^{r} 2\pi \frac{2Rr}{\sqrt{r^2 - h^2}} dh$$

c'est à dire $4\pi^2 Rr$.

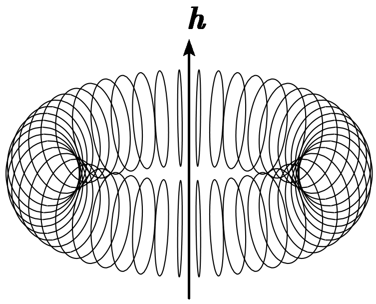


FIGURE 55 – Tore

48 Développement de Taylor avec reste intégral

Le théorème qui lie l'intégrale d'une fonction continue et la variation de sa primitive admet le corollaire suivant.

Théorème 48.1 *Soit $f : I \to$ une fonction dérivable définie sur un intervalle ouvert I. On suppose que f' est continue sur I. Si $b \in I$ et $a \in I$ alors*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx.$$

Ce théorème admet la généralisation suivante pour les fonctions qui sont n fois dérivables.

Théorème 48.2 *(***Formule de Taylor avec reste intégral***) Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $f : I \to$ une fonction n fois dérivable définie sur un intervalle ouvert I telle que $f^{(n)}$ soit continue sur I. Si $b \in I$ et $a \in I$ alors*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x)dx.$$

On déduit de ce théorème et des critères de comparaison des intégrales le résultat suivant.

Corollaire 48.1 *Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction n fois dérivable telle que $f^{(n)}$ soit continue. Soit $[a,b] \subset I$. On suppose qu'il existe $m < M$ tels que pour tout $x \in [a,b]$ on a $m \leq f^{(n)}(x) \leq M$. Alors*

$$\frac{(b-a)^n}{n!} m \leq f(b) - f(a) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \leq \frac{(b-a)^n}{n!} M.$$

Exemple 48.1 Si $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$ alors

$$|\cos(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Exemple 48.2 Si $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$ alors

$$|\sin(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}.$$

Exemple 48.3 Si $n \in \mathbf{N}^*$, $x \in \mathbf{R}$, $0 \leq y$ et $x \leq y$ alors

$$| \exp(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} x^k | \leq \frac{|x|^n}{n!} \exp(y).$$

Exemple 48.4 Si $n \in \mathbf{N}^*$, $0 \leq x$ alors

$$| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k | \leq \frac{1}{n+1}.$$

Sixième partie

Les fonctions de deux ou trois variables réelles

49 Fonctions numériques de deux ou trois variables et continuité

Définition 49.1 On appelle pavé ouvert de $\mathbf{R}^2$ (respectivement de $\mathbf{R}^3$) un ensemble de la forme $I_1 \times I_2$ (respectivement de la forme $I_1 \times I_2 \times I_3$) où les I_k sont des intervalles ouverts non vides de $\mathbf{R}$.

Définition 49.2 Soit A un sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$ (respectivement de $\mathbf{R}^3$), soit $a \in \mathbf{R}^2$ (respectivement $a \in \mathbf{R}^3$) et soit $l \in \mathbf{R}$. On dit qu'une fonction numérique f définie sur A admet l comme limite en a si d'une part il existe des points de A arbitrairement proches de a, c'est à dire dont les coordonnées sont arbitrairement proches de celles de a et si d'autre part les valeurs $f(x)$ sont arbitrairement proches de l lorsque $x \in A$ est arbitrairement proche de a.

Notation 49.1 Comme dans le cadre des fonctions numériques de la variable réelle, l'écriture $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ signifie que f possède une limite égale à l en a.

Remarque 49.1 (culturelle) La phrase *Les valeurs $f(x)$ sont arbitrairement proches de l lorsque x est arbitrairement proche de a en étant dans A* est équivalente à la formulation *Pour tout intervalle ouvert I contenant l il existe un pavé ouvert non vide J contenant a et tel que l'image $f(J)$ soit incluse dans I* :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, [(\forall i = 1, 2(\text{respectivement } i = 1, 2, 3), |x_i - a_i| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - l| < \varepsilon)].$$

Proposition 49.1 *Si f possède une limite en a cette limite est unique.*

Remarque 49.2 Soit $f : A \to \mathbf{R}$ et soit $a \in A$. Si f possède une limite en a alors cette limite vaut $f(a)$.

Définition 49.3 Soient $f : A \to \mathbf{R}$ et $a \in A$. On dit que f est **continue en** a si f possède une limite en a. Dans ce cas nécessairement cette limite vaut $f(a)$.

Remarque 49.3 Ici, il est **important** que a appartienne à A.

Définition 49.4 On dit que $f : A \to \mathbf{R}$ est **continue** si f est continue en a pour tout $a \in A$.

50 Fonctions continues de une à trois variables et à valeurs dans R, $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$

Définition 50.1 Soit A un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$ avec $n = 1, 2$ ou 3, soit $a \in \mathbf{R}^n$. On dit qu'une fonction f définie sur A et à valeurs dans $\mathbf{R}^m$ avec $m = 1, 2$ ou 3 admet $l \in \mathbf{R}^m$ comme limite en a si chacune de ses fonctions coordonnées admet comme limite en a la coordonnée correspondante de l.

Proposition 50.1 *Soient A, B et C des sous-ensembles de $\mathbf{R}^p$, de $\mathbf{R}^q$ et de $\mathbf{R}^r$ avec $p, q, r \in \{1, 2, 3\}$. Soient $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux fonctions. Soient $a \in \mathbf{R}^p$, $b \in \mathbf{R}^q$ et $c \in \mathbf{R}^r$. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{y \to b} g(y) = c$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = c$.*

Remarque 50.1 La simplicité de cet énoncé résulte du choix qu'on a fait de la définition de limite.

Définition 50.2 Soit A un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$ avec $n = 1, 2$ ou 3 et soit $a \in \mathbf{R}^n$. On dit qu'une fonction f définie sur A et à valeurs dans $\mathbf{R}^m$ avec $m = 1, 2$ ou 3. Soit $a \in A$. On dit que f est continue en a si f admet une limite en a. On dit que f est continue si f est en continue en tout $a \in A$.

Proposition 50.2 *Si A et B sont des sous-ensembles de $\mathbf{R}$, de $\mathbf{R}^2$ ou de $\mathbf{R}^3$ et si $f : A \to \mathbf{B}$ et $g : B \to \mathbf{R}$ sont continues alors $g \circ f : A \to \mathbf{R}$ est continue.*

51 Dérivées partielles de fonctions numériques de deux ou trois variables

Définition 51.1 Soit A un sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$ (respectivement de $\mathbf{R}^3$) et soit $a \in \mathbf{R}^2$ (respectivement $a \in \mathbf{R}^3$). On note (x, y) les coordonnées de $\mathbf{R}^2$ (respectivement (x, y, z) les coordonnées de $\mathbf{R}^3$). On suppose qu'il existe un pavé ouvert inclus dans A et contenant a. Si la fonction qui à t réel associe $f(a_1 + x, a_2)$ (respectivement $f(a_1 + x, a_2, a_3)$) est dérivable en 0 de dérivée l on dit que l est la dérivée partielle de f par rapport à x en a et on pose $\dfrac{\partial}{\partial x} f(a)$. Les dérivées partielles par rapport à y et z se définissent de façon analogue.

Exemple 51.1 La fonction f de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$ admet des dérivées partielles par rapport à chacune des coordonnées en tout $a \in \mathbf{R}^3$ et on a :

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) = 2x, \ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z) = 2y, \ \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) = 2z.$$

Définition 51.2 Soit A un sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$ ou de $\mathbf{R}^3$ et soit $f : A \to \mathbf{R}$. On dit que f admet un **maximum local** en a (respectivement **minimum local**) s'il existe un pavé P ouvert qui contient a et contenu dans A tel que $f(x) \leq f(a)$ (respectivement $f(x) \geq f(a)$) pour tout $x \in P$.

Proposition 51.1 *Soit A un sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$ (respectivement de $\mathbf{R}^3$) et soit $a \in \mathbf{R}^2$ (respectivement $a \in \mathbf{R}^3$). On note (x, y) les coordonnées de $\mathbf{R}^2$ (respectivement (x, y, z) les coordonnées de $\mathbf{R}^3$). On suppose qu'il existe un pavé ouvert inclus dans A et contenant a. Si la fonction f admet un extremum local en a et si f admet des dérivées partielles en a alors ces dernières sont nulles.*

Exemple 51.2 La fonction f de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 - y^2$ admet des dérivées partielles par rapport à x et à y en tout point et on a :

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 2x, \ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = -2y.$$

Or ces deux dérivées partielles sont simultanément nulles seulement en $(0, 0)$. Donc, si f admet un extremum c'est nécessairement en $= (0, 0)$. Mais $0 = (0, 0)$ n'est pas un extremum local car la restriction de f à $\{x = 0\}$ est strictement négative sauf à l'origine et la restrcition de f à $\{y = 0\}$ est strictement positive sauf à l'origine.

Table des matières