INTÉGRATION ET GÉOMÉTRIE

Texte paru dans la revue de l'IREM de Rennes

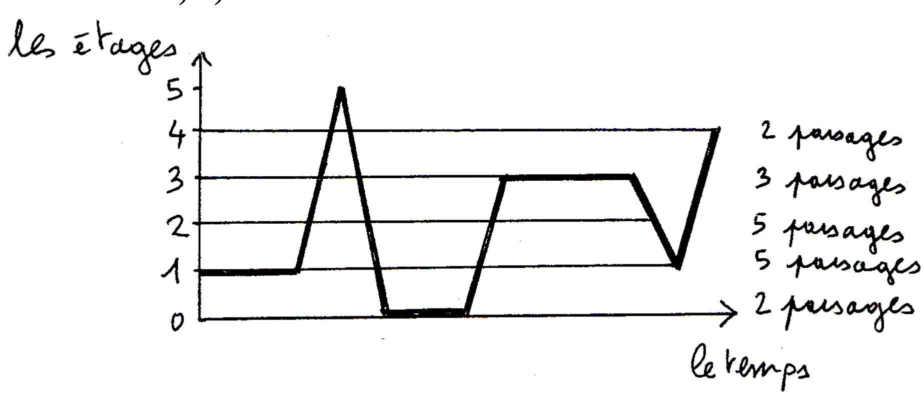
Rémi Langevin[1] et Jean-Marie Lion[2]

d'après "Un peu de Géométrie intégrale" de Rémi Langevin

(Images des Mathématiques, 1995, CNRS)

I. Un exemple élémentaire. On suppose les cinq étages d'un immeuble espacés de trois mètres. Quelle distance parcourt l'ascenseur en faisant les mouvements suivants : 1er-5ème-Rdc-3ème-1er-4ème ?

En faisant la somme des longueurs des cinq trajets on obtient (12+15+9+6+9)=51 mètres. On peut aussi compter le nombre moyen de passage du bas de la cabine devant les six niveaux et le multiplier par la hauteur de l'immeuble (18 mètres). En s'aidant de la figure, on compte 2 passages devant le rez-de-chaussée, 5 devant le 1er et le 2ème, 3 devant le 3ème, 2 devant le 4ème, et, l'ascenceur ne présentant pas de disfonctionnnement, aucun passage devant le dernier étage. Ceci permet de retrouver les 18((2+5+5+3+2+0)/6)=51 mètres.



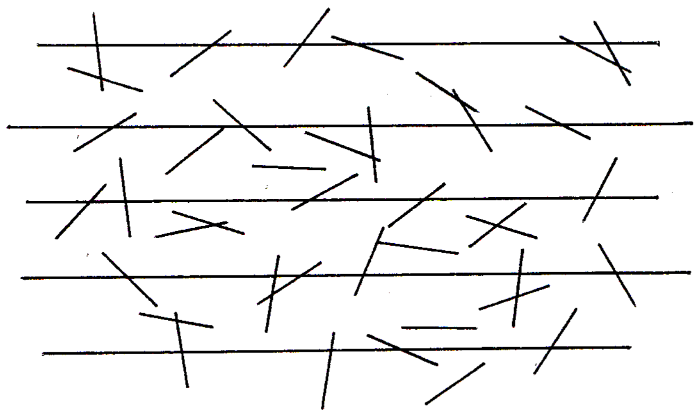
La seconde méthode semble compliquée. Son intérêt en Géométrie sera illustré par les exemples qui vont suivre.

II. Les aiguilles de Buffon. Buffon cherche des jeux *continus* (par opposition aux jeux discrets que sont les dés ou les cartes) et il résoud un problème de probabilité à l'aide de la géométrie en démontrant le résultat suivant [Buf].

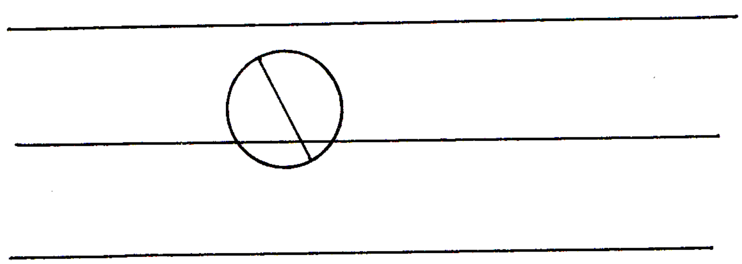
[1]langevin@u-bourgogne.fr, Laboratoire de Topologie-Université de Bourgogne

[2]jean-marie.lion@univ-rennes1.fr, IRMAR-Université de Rennes 1

Théorème de Buffon. [Buf] *Considérons des aiguilles qui tombent sur un parquet. Si leur longueur est égale à la largeur des lattes, la probabilité qu'une aiguille tombe à cheval sur deux lattes est de* $2/\pi$.



Si le nombre π apparaît, c'est qu'il y a un cercle ou un disque caché derrière le problème de Buffon. Supposons que l'aiguille soit le diamètre d'un jeton représentant le disque caché. Lançons le jeton sur le parquet. Puisque la longueur de l'aiguile est égale à la largeur des lattes, sauf configuration rarissime (jeton ne reposant que sur une latte), le jeton ne rencontre qu'une seule des droites délimitant les lattes.

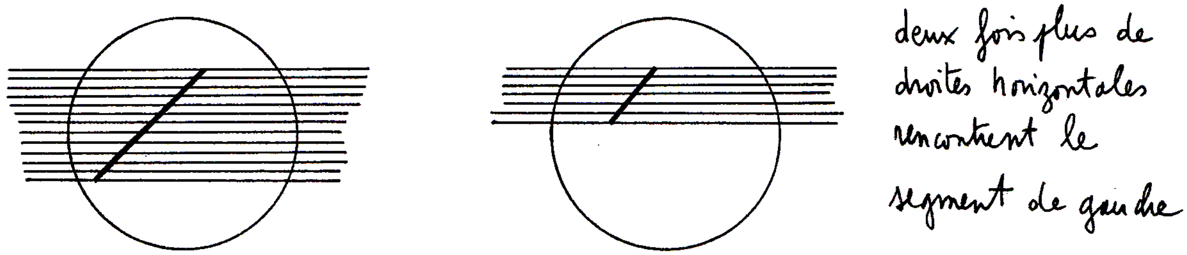


Le point de vue d'une fourmi. Tout est relatif : pour une fourmi voltigeuse collée au jeton, c'est le parquet qui tombe sur le jeton. Ainsi le problème de Buffon est équivalent au problème suivant.

Quelle est la probabilité pour qu'une droite rencontrant un disque de rayon 1 coupe un diamètre fixé ?

On répond à cette question à l'aide d'un résultat de Géométrie Intégrale. Si on compare avec l'exemple élémentaire, on remarque que la longueur d'un segment, ou plus généralement, celle d'une courbe inscrite dans ce disque, est proportionnelle au nombre moyen de points d'intersection du segment (ou de la courbe) avec les droites rencontrant le disque. Prenez une courbe C de longueur l dans le disque et divisez la en deux morceaux C_1 et C_2 de longueur l_1 et l_2 : $l = l_1 + l_2$. On note n, n_1 et n_2 les nombres moyens de points d'intersection de la courbe C et des deux morceaux C_1

et C_2 avec les droites rencontrant le disque. Alors on a $n = n_1 + n_2$. Les longueurs et les nombres moyens de points d'intersection avec les droites rencontrant le disque sont donc des grandeurs "additives" et de plus elles ont le même comportement par changement d'echelle (ou homothétie) : c'est pour cela qu'elles sont proportionnelles.



On évalue la constante de proportionnalité en la calculant dans un cas facile : celui où la courbe est le cercle qui borde le disque. Cette constante est le quotient entre la longueur du cercle, 2π, et le nombre de points d'intersection du cercle avec les droites rencontrant le disque qui est 2 : elle vaut donc π. On vient d'établir la formule suivante.

1ère formule de Cauchy et Crofton. [Cau], [Cro] *La longueur d'une courbe inscrite dans un disque de rayon* 1 *est* π *fois le nombre moyen de points d'intersection de cette courbe avec les droites rencontrant le disque.*

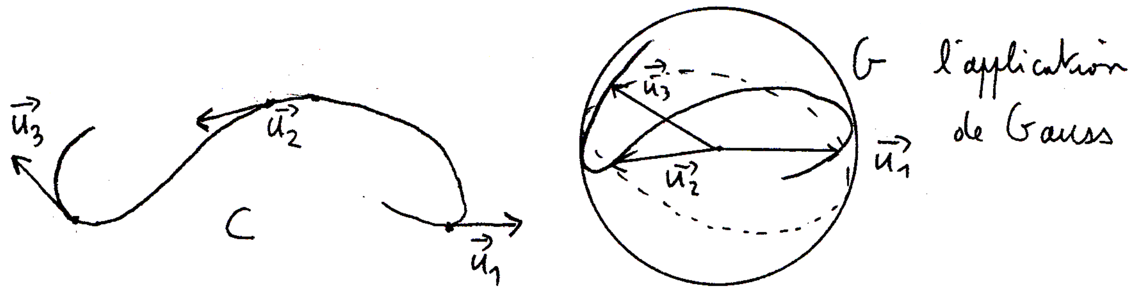
Revenons au problème de Buffon et de la fourmi. En général, une droite qui rencontre le disque coupe le diamètre fixé en un point au plus. Ainsi, la probabilité cherchée est exactement le nombre moyen de points d'intersection du diamètre fixé avec les droites qui rencontrent le disque. Puisque la longueur du diamètre est 2, on déduit de la 1ère formule de Cauchy et Crofton que la probabilité cherchée vaut bien le $2/\pi$ de Buffon.

III. Un peu de Géométrie Sphérique. Sur une sphère, les droites sont remplacées par les grands cercles. Ainsi la longueur d'une courbe inscrite sur une sphère de rayon 1 est proportionnelle au nombre moyen de points d'intersection de cette courbe avec les grands cercles. La constante de proportionnalité se calcule en considérant un cas facile : celui où la courbe est un grand cercle. Cette constante est le quotient entre la longueur du grand cercle choisi, 2π, et le nombre de points d'intersection avec un autre grand cercle, toujours 2 : elle vaut donc π. Ainsi Santalo prouve :

2ème formule de Cauchy et Crofton. [San] *La longueur d'une courbe assez régulière inscrite sur une sphère de rayon* 1 *est* π *fois le nombre moyen de points d'intersection de cette courbe avec les grands cercles.*

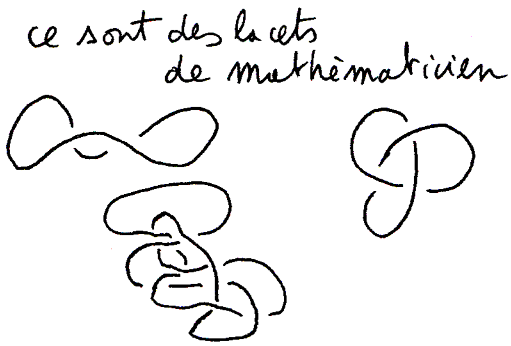
IV. Courbure totale. Soit C une courbe orientée de l'espace : on fixe son sens de parcours. À chaque point m de C on associe un unique vecteur $\overrightarrow{u}$ de la sphère de rayon

1 défini de la façon suivante : il est parallèle à la tangente à la courbe au point *m* et il pointe dans le sens de parcours de *C*. On vient de définir l'application de Gauss. Lorsque le point *m* décrit la courbe *C* le vecteur $\vec{u}$ décrit une courbe de la sphère de rayon 1 notée *G* et appelée courbe des directions.



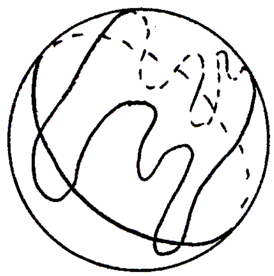
On appelle courbure totale de la courbe *C* la longueur de la courbe des directions *G*. Ce nombre "mesure" la somme des changements de directions lorsqu'on parcourt une fois la courbe *C*. Par exemple, la courbure totale d'un cercle est 2π (un "tour").

V. Les lacets du cordonnier et ceux du mathématicien. On appelle lacet une courbe fermée. Si on parcourt un lacet dans un sens donné on revient sur ses pas. Un cercle déformé ou un nœud sont des exemples de lacets. Pour un mathématicien, un lacet de chaussures n'est pas un lacet...



Exercice. *Maintenant, sauriez vous dire pourquoi un lacet de longueur inférieure à* 2π *inscrit sur une sphère se trouve dans un hémisphère ?*

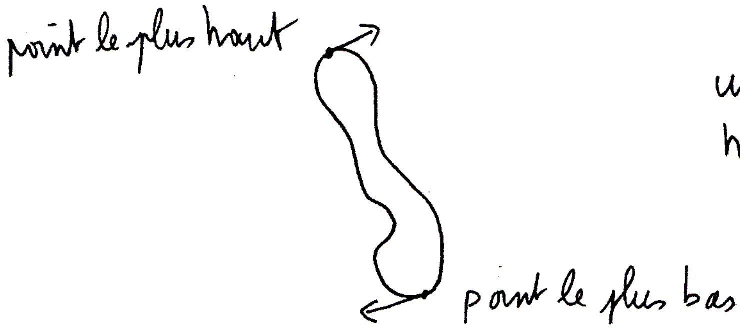
D'après la seconde formule de Cauchy et Crofton le nombre moyen de points d'intersection de ce lacet avec un grand cercle est inférieur à 2. Or, en général, les points d'intersection d'un lacet et d'un grand cercle sont en nombre pair.



généralement, un lacet sur une sphère et un grand cercle se coupent transversalement. le nombre de leurs points communs est alors pair.

Dans notre situation, il existe donc au moins un grand cercle qui n'est pas coupé par le lacet. Ce dernier est contenu dans un des deux hémisphères séparés par ce grand cercle.

VI. Un lacet, ça tourne ! Si la courbure totale d'un lacet *C* est strictement inférieure à 2π, le lacet des directions *G* est alors contenu dans un hémisphère (voir l'exercice). Quitte à tourner le lacet *C* on peut supposer que le lacet des directions *G* est dans l'hémisphère nord : la courbe *G* ne coupe pas l'équateur qui correspond aux directions de tangence horizontale. Ceci n'est pas possible car le lacet *C* admet au moins deux tangentes horizontales, les tangentes au point le plus bas et au point le plus haut de *C*.



un lacet et ses tangentes horizontales

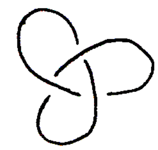
Cette contradiction permet d'établir le résultat suivant.

Théorème de Fenchel. [Fen1] *La courbure totale d'un lacet est supérieure ou égale à* 2π.

VII. Un nœud, c'est très tordu. Si la courbure d'un lacet *C* est inférieure strictement à 4π, on déduit encore de la deuxième formule de Cauchy et Crofton qu'il existe un grand cercle (qu'on supposera être l'équateur) qui n'est coupé que deux fois par le lacet des directions *G* (nombre pair inférieur strictement à quatre). Il n'y a donc que deux points où le lacet a une tangente horizontale : ce sont le point le plus bas et le point le plus haut.

un lacet peu tordu

un noeud



Ceci signifie que les deux chemins sur le lacet qui relient le point le plus bas au point le plus haut sont partout ascendants. Quand on coupe le lacet par un plan horizontal on ne rencontre que deux points. En reliant chaque paire de points de même altitude par un segment on constate que le lacet n'est pas noué : il peut être déformé pour devenir un vrai cercle. Ceci prouve le célèbre

Théorème de Fary, Fenchel et Milnor. [Far], [Fen2], [Mil] *Un lacet de courbure totale inférieure à* 4π *n'est pas noué.*

Le lecteur qui souhaite approfondir le sujet peut consulter les livres de Berger et Gostiaux [BG], do Carmo [Car], Santaló [San] ou les textes de Langevin [Lan1,2] et Spivak [Spi] indiqués dans la bibliographie.

Bibliographie.

[BG] M. Berger et B. Gostiaux, *Géométrie Différentielle*, PUF, (1987)

[Buf] G. L. L. comte de Buffon, *Essai d'arithmétique morale* (1777)

[Car] M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, (1976)

[Far] I. Fary, *Sur la courbure totale d'une courbe gauche faisant un noeud*, Bull. SMF 77, 128-138 (1949)

[Fen1] W. Fenchel, *Uber Frümmung und Windung geschlössener Raum Kurven*, Math. Ann. 101 (1929)

[Fen2] W. Fenchel, *On the differential geometry of closed curves*, Bull. of Amer. Math. Soc. 15, 44-54 (1951)

[Lan1] R. Langevin, *Un peu de Géométrie Intégrale*, Images des Mathématiques 95, CNRS, (1995)

[Lan2] R. Langevin *La petite musique e la géométrie intégrale*, La recherche de la vérité, éditeur scientifique : M. Serfati, ACL éditions Paris (1998)

[Mil] J. Milnor, *On total curvature of knots*, Annals of Mathematics 52, 248-260 (1950)

[San] L. A. Santaló, *Introduction to integral geometry*, Actualités Sci. Ind., no. 1198 Publ. Inst. Math. Univ. Nancago II, Herman et Cie, Paris (1953)

[Spi] M. Spivak, *A brief report on John Milnor's brief excursions into Differential Geometry*, Topological Methods in Modern Mathematics, Publish or Perish (1993)