

Université de Rennes 1
Préparation au Capes de mathématiques
Compléments de géométrie
Questions abordées
pendant les six séances 2006-2007

Jean-Marie Lion

Version β' du 11 septembre 2007
(première version en ligne le 10 février 2007)

Preliminaire

Pour bien se préparer aux questions de géométrie du Capes de mathématiques il est absolument nécessaire d'étudier les manuels et les programmes du secondaire et de voir ou de revoir les éléments de géométrie assez nombreux présents au programme du concours.

On peut trouver dans les bibliothèques universitaires de nombreux ouvrages utiles. En voici une petite liste : Coxeter et Greitzer (Redécouvrons la géométrie), Pedoe (Geometry. A comprehensive course), Ramis, Sauloy, Warusfel et al. (Mathématiques. Tout en un pour la licence - Niveau L1), Robert (L'épreuve sur dossier à l'oral du capes de mathématiques. I. Géométrie), Tisseron (Géométrie affine, projective et euclidienne). Pour aller plus loin on peut regarder le livre de Berger (Géométrie).

Sur la toile il y a de très nombreux sites qui traitent de questions géométriques et plus généralement de mathématiques. Signalons deux classiques :

<http://fr.wikipedia.org/>

et <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/>.

Certains sites s'adressent aux collégiens, lycéens et à leurs professeurs.

Les questions abordées ici sont loin de faire le tour de la géométrie du Capes. Les thèmes ont été choisis parce qu'ils permettent de sentir l'unité mathématiques : si la géométrie y occupe une place centrale l'analyse, algèbre, la topologie et la théorie de l'intégrale fournissent des arguments précieux

pour traiter les questions géométriques proposées. Toutes les notions mathématiques prérequis font partie des programmes courants des trois années d'une licence de mathématiques. De nombreux rappels de cours sont écrits.

Le texte qui suit est formé de deux parties de longueurs inégales et d'une annexe. La première est un résumé de questions géométriques du collège à l'université. La seconde est leur résolution. Les arguments utilisés se veulent élémentaires. Ils entraînent parfois des détours. C'est pourquoi, certaines réponses sont parfois très longues et mériteraient probablement d'être découpées en sous-réponses à des sous-questions. Il reste donc un travail pédagogique à faire qui est un excellent exercice (problème) pour les futurs enseignants de géométrie. L'annexe aborde des questions non évoquées pendant les six séances.

Il est conseillé au lecteur de lire ce texte avec un papier et un crayon pour suivre les démonstrations en faisant des figures.

Avant de faire un peu de géométrie citons un extrait du Programme d'Erlangen de Klein : "*Comme généralisation de la Géométrie se pose ainsi la question générale que voici : Étant donné une multiplicité et un groupe de transformations de cette multiplicité, en étudier les êtres au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe.*"

Les dessins ont été réalisés à l'aide de fig4tex développé par Yvon Lafranche et Daniel Martin.

Liste des différentes questions abordées au cours des six séances.

0. Montrer avec des arguments connus en 4ème qu'un triangle inscrit dans un cercle et dont un côté est un diamètre du cercle est rectangle. On utilisera en particulier qu'un quadrilatère est un rectangle si les diagonales sont de même longueur et de même milieu (Cinq sur cinq, 4ème, page 147).
1. Groupes et sous-groupes : définitions.
2. Sous-groupe de \mathbf{R} : caractérisation.
3. Exponentielle complexe. Construction et principales propriétés, liens avec la trigonométrie du cercle. Arguments d'analyse utilisés : critère de Cauchy pour les suites complexes, différentielle d'une fonction de deux variables réelles et inversion locale, estimation à l'aide de la série géométrique de raison $\frac{1}{2}$, signe d'une fonction numérique de la variable réelle au voisinage d'un zéro où la dérivée est non nulle, théorème des valeurs intermédiaires. Arguments de topologie utilisés : l'étude des sous-groupes de \mathbf{R} , continuité et connexité. Étude de la suite $z_0 = i, z_{n+1}^2 = z_n$ et $\text{Im}(z_n) > 0$ pour montrer que $\{x \in \mathbf{R} \mid \exp(ix) = 1\}$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

4. Réduction des formes quadratiques définies positives par deux méthodes (une méthode analytique avec le groupe du mercredi et une méthode algébrique avec celui du jeudi).
5. Produit scalaire, espaces vectoriels et espaces affines euclidiens et leurs topologies, sphères et cercles.
6. Le groupe orthogonal en dimension n , 2 et 3.
7. Les sous-groupes finis de $GL_n(\mathbf{R})$ sont conjugués à des sous-groupes du groupe orthogonal.
8. Les groupes compacts de $GL_n(\mathbf{R})$ de la forme $\overline{\langle g \rangle}$ sont conjugués à des sous-groupes du groupe orthogonal (application de la triangulation des endomorphismes).
9. Les angles de vecteurs, de demi-droites, de droites et géométriques. On montre par quatre méthodes différentes que la somme des trois angles géométriques d'un triangle est 180 degrés. Une fois on utilise des arguments de convexité, des coordonnées barycentriques et la conservation des angles géométriques sous l'action des isométries. Une autre fois on fait un calcul à l'aide de trois bases qui définissent la même orientation. La troisième preuve, plus savante, utilisera des arguments topologiques. La dernière utilise les nombres complexes et repose sur une identité utile pour prouver le théorème de l'angle au centre et les propriétés de cocyclicité.
10. Montrer avec des arguments connus en 3ème que l'intersection d'une sphère et d'un plan est soit le vide, soit un point, soit un cercle (voir le document d'accompagnement du programme de 1998 - CNDP).
11. La preuve d'Euclide du théorème de Pythagore, à partir de la figure du Moulin à vent.
12. La formule $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$ et le produit scalaire : survol des programmes de Géométrie de la première S à la quatrième.
13. Quelques rappels de géométrie différentielle dans \mathbf{R}^2 sont faits : inversion locale, fonctions implicites, paramétrisation par l'abscisse curviligne, variation continue de la mesure d'un angle qui dépend de façon C^1 d'un paramètre.
14. Rappels sur les barycentres, les coordonnées barycentriques et la convexité.
15. Diverses façons de prouver $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin(t)}{t} = 1$ suivant les prérequis admis (avec le groupe du jeudi).
16. Paramétrisation du cercle par les droites passant par un de ses points. Application à la résolution dans \mathbf{Q}^2 de l'équation $x^2 + y^2 = 1$.
17. Polygones convexes et étoilés. Divers exercices qui permettent de résoudre le problème de Dido pour les lignes polygonales.

- 18. Interprétation des moyennes arithmétiques, géométriques, harmoniques, quadratiques.
- 19. Les applications qui conservent la distance euclidiennes sont des isométries affines.
- 20. Théorème de séparation de Jordan pour les lacets polygonaux.

Développements des différentes questions abordées au cours des six séances.

0. Montrer avec des arguments connus en 4ème qu'un triangle inscrit dans un cercle et dont un côté est un diamètre du cercle est rectangle.

On utilisera en particulier qu'un quadrilatère est un rectangle si les diagonales sont de même longueur et de même milieu (Cinq sur cinq, 4ème, page 147).

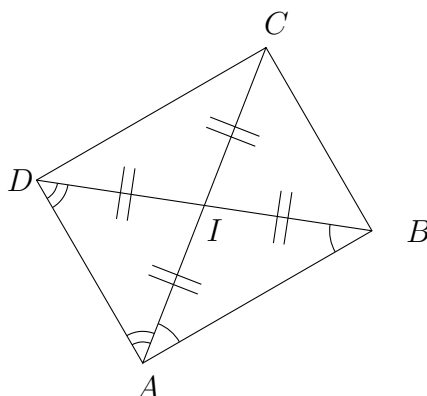
α . Montrons d'abord le résultat admis sur les quadrilatères. Soit (A, B, C, D) un quadrilatère dont les diagonales sont de même longueur et ont le même milieu noté I . Les longueurs IA, IB, IC et ID sont égales. Ainsi on a :

$$\begin{aligned}\widehat{BAI} &= \widehat{IBA} = \frac{180 - \widehat{AIB}}{2} \\ \widehat{IAD} &= \widehat{ADI} = \frac{180 - \widehat{DIA}}{2} \\ \widehat{DIA} + \widehat{AIB} &= \widehat{DIB} = 180\end{aligned}$$

On obtient

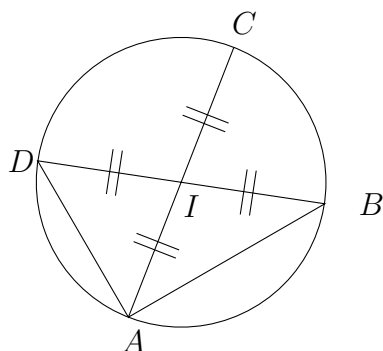
$$\begin{aligned}\widehat{BAD} &= \widehat{BAI} + \widehat{IAD} \\ &= \frac{180 - \widehat{AIB}}{2} + \frac{180 - \widehat{DIA}}{2} \\ &= 180 - \frac{\widehat{AIB} + \widehat{DIA}}{2} \\ &= 180 - 90 \\ &= 90\end{aligned}$$

Ainsi l'angle \widehat{BAD} est droit. On montre de même que les angles \widehat{CBA} , \widehat{DCB} et \widehat{ADC} sont droits. Par conséquent (A, B, C, D) est bien un rectangle.



Les angles considérés sont des angles géométriques de demi-droites ou de vecteurs et on suppose connues plusieurs de leurs propriétés. En particulier si M est un point du segment $[BD]$ et différent de B et D alors $\widehat{DMB} = 180$ et $\widehat{BAD} = \widehat{BAM} + \widehat{MAD}$. On admet aussi que la somme des trois angles intérieurs d'un triangle est 180. On utilise enfin le fait qu'un quadrilatère dont les quatre angles sont droits est un rectangle.

β . Considérons maintenant un triangle (A, B, D) inscrit dans un cercle \mathcal{C} dont $[BD]$ est l'un des diamètres. Soit I le milieu de $[BD]$. C'est le centre du cercle \mathcal{C} . Les longueurs AI , BI et DI sont égales. Soit C le symétrique de A par rapport à I . Les points A , I et C sont alignés et les longueurs AI et CI sont égales. Nous sommes dans la configuration décrite en α : l'angle \widehat{BAD} est droit.



1. Groupes et sous-groupes : définitions.

On appelle *groupe* un couple (G, \perp) qui vérifient les propriétés suivantes : G est un ensemble non vide, \perp est une *loi de composition interne* (\perp est une application de $G \times G$ dans G), *associative* (si $x, y, z \in G$ alors $x \perp (y \perp z) = (x \perp y) \perp z$), qui possède un *élément neutre* e (si $x \in G$ alors $x \perp e = e \perp x = x$) et telle que tout élément de G admet un *inverse* pour \perp (si $x \in G$ il existe $x' \in G$ tel que $x \perp x' = x' \perp x = e$). Un *sous-groupe* G' de (G, \perp) est un sous-ensemble non vide de G , stable sous l'action de \perp (si $x, y \in G'$ alors $x \perp y \in G'$) et tel que (G', \perp) est un groupe. On dit que (G, \perp) est *commutatif* si \perp est *commutative* (si $x, y \in G$ alors $x \perp y = y \perp x$).

Un *morphisme de groupe* ϕ est une application ϕ d'un groupe (G, \perp) dans un groupe $(H, *)$ qui vérifie $\phi(a \perp b) = \phi(a) * \phi(b)$ pour $a, b \in G$. On vérifie facilement que l'image $\phi(G')$ d'un sous-groupe de G par ϕ est un sous-groupe de H et l'image réciproque $\phi^{-1}(H')$ d'un sous-groupe de H par ϕ est un sous-groupe de G . En particulier l'image réciproque du neutre pour $*$ est un sous-groupe de G appelé *noyau de ϕ* et noté $\ker(\phi)$. Le morphisme ϕ est injectif si et seulement si $\ker(\phi)$ est réduit au neutre de \perp .

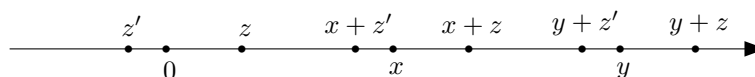
2. Sous-groupe de \mathbf{R} : caractérisation.

L'ensemble des réels \mathbf{R} muni de l'addition est un groupe commutatif dont le neutre est 0. Outre \mathbf{R} lui-même, les sous-groupes de $(\mathbf{R}, +)$ sont de deux types. Il y a les monogènes. Ce sont ceux qui sont engendrés par un élément. Un tel sous-groupe est de la forme $G = \{ng : n \in \mathbf{Z}\}$ où g est un générateur de G . C'est un sous-ensemble fermé et discret de \mathbf{R} : tout point de G est isolé. Les autres sous-groupes de \mathbf{R} différents de \mathbf{R} sont ceux qui ne sont pas monogènes. Nous allons prouver qu'ils sont denses mais qu'ils ne sont pas fermés.

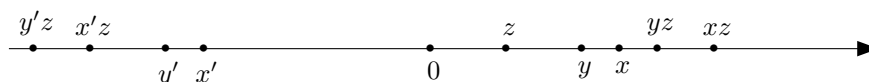
Nous aurons besoin d'utiliser plusieurs propriétés du corps $(\mathbf{R}, +, \times)$ que nous allons expliquer.

Tout d'abord \mathbf{R} est un corps totalement ordonné :

- si $x, y \in \mathbf{R}$ soit $x \leq y$, soit $y \leq x$;
- pour $x, y, z \in \mathbf{R}$ si $x < y$ alors $x + z < y + z$ et si de plus $0 < z$ alors $xz < yz$.



compatibilité de l'addition avec l'ordre



compatibilité de la multiplication avec l'ordre

On déduit de ces conditions que $1 = 1^2 = (-1)^2$ vérifie $0 < 1$.

Tout sous-ensemble non vide de \mathbf{R} et minoré admet une borne inférieure : si $x, y \in \mathbf{R}$ et $X \subset \mathbf{R}$ vérifient

$$(x \in X) \text{ et } (\forall z \in X, y < z)$$

alors il existe $w \in \mathbf{R}$ qui vérifie

$$(\forall z \in X, w \leq z) \text{ et } (\forall z \in X, w < z \Rightarrow \exists v \in [w, z] \cap X).$$

Le nombre w s'appelle la borne inférieure de X . C'est un minorant de X et c'est le plus grand des minorants de X .



Cette propriété de la borne inférieure est équivalente à la propriété de la borne supérieure : tout sous-ensemble non vide de \mathbf{R} et majoré admet une borne supérieure.

Enfin le corps \mathbf{R} est archimédien : si $x > 0$ et si $y \in \mathbf{R}$ il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $y \leq nx$.



la propriété d'Archimède

Montrons que le caractère archimédien de \mathbf{R} résulte du fait que c'est un corps totalement ordonné qui possède la propriété de la borne supérieure. Soit x et y deux réels tels que $x > 0$. Si $y \leq 0$ alors $y \leq nx$ pour tout entier naturel n . Supposons $y > 0$. L'ensemble

M des réels mx tels que $m \in \mathbf{N}$ et $mx < y$ est non vide car il contient 0 et il est majoré par y . Il admet une borne supérieure B . Si $M = \{mx | m \in \mathbf{N}\}$ alors pour tout entier naturel m on aurait $mx \leq B$ mais aussi $(m+1)x \leq B$. Ceci impliquerait que $B - x$ qui est strictement plus petit que B car $x > 0$ serait un majorant de M . Ceci contredirait le fait que B soit la borne supérieure de M . Par conséquent il existe un entier naturel n tel $nx \in \mathbf{R} \setminus M$. Il vérifie $y \leq nx$. Ainsi \mathbf{R} est archimédien.

Le caractère archimédien de \mathbf{R} implique l'existence de la fonction partie entière. En effet, puisque \mathbf{R} est archimédien, si $x \geq 0$ le sous-ensemble S_x des entiers naturels strictement supérieurs à x n'est pas vide. Il admet donc un plus petit élément noté $s(x)$. L'entier $s(x)$ est non nul. On appelle partie entière de x et on note $E(x)$ l'entier $s(x) - 1$. La partie entière s'étend à \mathbf{R} en posant $E(x) = -1 - E(-x)$ si $x < 0$. La partie entière admet la caractérisation suivante. Si $x \in \mathbf{R}$, $E(x)$ est l'unique entier relatif qui vérifie $E(x) \leq x < E(x) + 1$.



Soit G un sous-groupe de \mathbf{R} différent de \mathbf{R} et de 0. Il existe donc $x \in G \setminus \{0\}$. Ainsi x ou son opposé est strictement positif et appartient à G . Le sous-ensemble $G^{+*} = \{y \in G : y > 0\}$ est non vide et minoré par 0. Il admet une borne inférieure g .

Supposons $g = 0$ et montrons que G est dense, c'est à dire que $\overline{G} = \mathbf{R}$ ou encore que si $y \in \mathbf{R}$ il existe une suite $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de G qui tend vers y . Puisque $g = 0$, si $n \in \mathbf{N}$ on peut choisir un $x_n \in [0, \frac{1}{1+n}[\cap G^{+*} =]0, \frac{1}{1+n}[\cap G^{+*}$. Soit $y \in \mathbf{R}$. Si $n \in \mathbf{N}$ on note e_n la partie entière de $\frac{y}{x_n}$ et on pose $y_n = e_n x_n$. Par construction on a $y_n \leq y \leq y_n + x_n$ et donc $|y - y_n| < \frac{1}{n+1}$. La suite $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers y . Ainsi G est bien dense.

Supposons $g > 0$ et montrons que G est le sous-groupe monogène $g\mathbf{Z} = \{ng : n \in \mathbf{Z}\}$. Montrons d'abord par l'absurde que $g \in G^{+*}$. Si ce n'est pas le cas il existe $a \in]g, 2g[\cap G^{+*}$ et $b \in]g, a[\cap G^{+*}$. La différence $a - b$ appartient à $]0, g[\cap G^{+*}$. Ceci contredit le fait que g est la borne inférieure de G^{+*} . On vient prouver que $g \in G$ et $g\mathbf{Z} \subset G$. Montrons par l'absurde que $G \subset g\mathbf{Z}$. Si ce n'est pas le cas, il existe $y \in G \setminus g\mathbf{Z}$. On note e la partie entière de $\frac{y}{g}$. La différence $y - eg$ appartient à $]0, g[\cap G^{+*}$. Ceci contredit encore une fois le fait que g est la borne inférieure de G^{+*} . Ainsi si $g > 0$ alors $G = g\mathbf{Z}$.

3. Exponentielle complexe. Construction et principales propriétés, liens avec la trigonométrie du cercle.

Arguments d'analyse utilisés : critère de Cauchy pour les suites complexes, différentielle d'une fonction de deux variables réelles et inversion locale, estimation à l'aide de la série géométrique de raison $\frac{1}{2}$, signe d'une fonction numérique de la variable réelle au voisinage d'un zéro où la dérivée est non nulle, théorème des valeurs intermédiaires. Arguments de topologie utilisés : l'étude des sous-groupes de \mathbf{R} , continuité et connexité. Étude de la suite définie par $z_0 = i, z_{n+1}^2 = z_n$ et $\text{Im}(z_n) \geq 0$ pour montrer que $\{x \in \mathbf{R} \mid \exp(ix) = 1\}$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

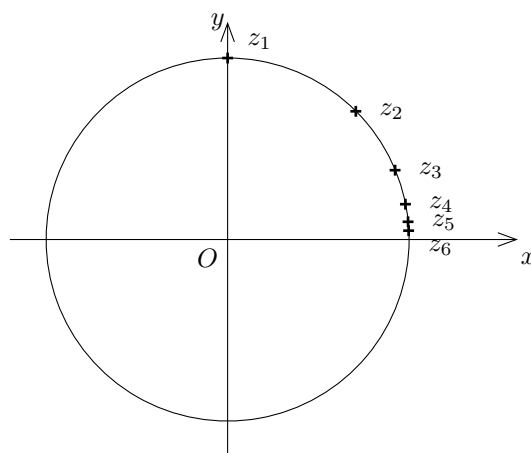
3.1. Montrons que la suite définie par $z_0 = i, z_{n+1}^2 = z_n$ et $\text{Im}(z_n) > 0$ est bien définie et converge vers 1.

Si $t \in [0, 1[$ alors $0 < \frac{t+1}{2} \leq \sqrt{\frac{t+1}{2}} < 1$ et $0 < \frac{1-t}{2} \leq 1$.

À l'aide de ces inégalités, on vérifie par un calcul et une récurrence que pour tout $n \geq 0$ on a $|z_n| = 1$, $0 \leq \text{Re}(z_n) < 1$, $0 < \text{Im}(z_n) \leq 1$ et

$$\text{Re}(z_{n+1}) = \sqrt{\frac{\text{Re}(z_n) + 1}{2}}, \quad \text{Im}(z_{n+1}) = \sqrt{\frac{1 - \text{Re}(z_n)}{2}}.$$

Si $t \in [0, 1[$ alors $0 \leq t < \frac{t+1}{2} < 1$. Cette inégalité appliquée à $\text{Re}(z_n)$ implique que $(\text{Re}(z_n))_{n \geq 0}$ est strictement croissante et bornée par 1. La suite $(\text{Re}(z_n))_{n \geq 0}$ est donc convergente et sa limite est l'unique point fixe de la fonction continue définie sur $[0, 1]$ par $f(t) = \sqrt{\frac{t+1}{2}}$ c'est à dire 1. Puisque $\text{Im}(z_{n+1}) = g(z_n)$ où g est la fonction continue et strictement décroissante définie sur $[0, 1]$ par $g(t) = \sqrt{\frac{1-t}{2}}$ on en déduit que la suite $(\text{Im}(z_n))_{n \geq 0}$ est strictement décroissante et tend vers $g(1) = 0$. Ainsi la suite $(z_n)_{n \geq 0}$ est bien définie et converge vers 1. De plus $(\text{Re}(z_n))_{n \geq 0}$ et $(\text{Im}(z_n))_{n \geq 0}$ sont positives et $(\text{Im}(z_n))_{n \geq 0}$ est strictement décroissante.



3.2. Montrons que si $z \in \mathbf{C}$ la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

converge vers un nombre complexe noté $\exp(z)$ appelée l'exponentielle de z .

Soit N un entier supérieur ou égal à $2|z|$. Si $N < p < q \in \mathbf{N}$ alors pour tout n compris entre $p+1$ et q on a $|\frac{z^n}{n!}| < \frac{|z|^N}{N!} \frac{1}{2^{n-N}}$ et donc

$$\left| \sum_{n=p+1}^q \frac{z^n}{n!} \right| \leq \frac{|z|^N}{N!} \sum_{n=p+1}^q \frac{1}{2^{n-N}} = \frac{|z|^N}{N!} \frac{1}{2^{p+1-N}} 2(1 - \frac{1}{2^{q-p}}) \leq \frac{|z|^N}{N!} \frac{2}{2^{p+1-N}}.$$

Ceci montre que la suite

$$\left(\sum_{n=0}^p \frac{z^n}{n!} \right)_{p \in \mathbf{N}}$$

est de Cauchy donc convergente. Ainsi la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

converge bien et l'exponentielle de z est bien définie.

3.3. Montrons que l'exponentielle, considérée comme une fonction de deux variables réelles, est différentiable en 0 et que sa différentielle en 0 est l'identité. Il suffit de montrer que

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\exp(z) - 1}{z} = 1.$$

Ceci revient à montrer que si $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ alors la série

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{n!}$$

est convergente c'est à dire de Cauchy. C'est le cas car si $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ et si $N, p, q \in \mathbf{N}$ vérifient $2|z| \leq N < p < q$ alors le calcul fait en 3.2. montre que

$$\left| \sum_{n=p+1}^q \frac{z^{n-1}}{n!} \right| \leq \frac{|z|^{N-1}}{N!} \sum_{n=p+1}^q \frac{1}{2^{n-N}} = \frac{|z|^{N-1}}{N!} \frac{1}{2^{p+1-N}} 2(1 - \frac{1}{2^{q-p}}) \leq \frac{|z|^{N-1}}{N!} \frac{2}{2^{p+1-N}}.$$

3.4. Montrons que si $z, z' \in \mathbf{C}$ alors $\exp(z + z') = \exp(z) \exp(z')$.

Il suffit de montrer que la suite

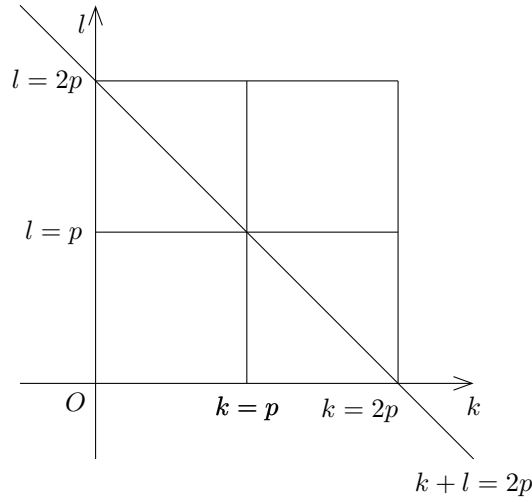
$$(u_p)_{p \in \mathbf{N}} = \left(\sum_{n=0}^{2p} \frac{(z + z')^n}{n!} - \left(\sum_{k=0}^p \frac{z^k}{k!} \right) \left(\sum_{l=0}^p \frac{z'^l}{l!} \right) \right)_{p \in \mathbf{N}}$$

tend vers 0. Or le développement de chaque terme $\frac{(z+z')^n}{n!}$ à l'aide du binôme de Newton donne

$$\frac{(z+z')^n}{n!} = \sum_{k+l=n} \frac{z^k}{k!} \frac{z'^l}{l!}.$$

Par conséquent si $p \in \mathbf{N}$,

$$u_p = \sum_{\substack{k+l \leq 2p \\ k > p \text{ ou } l > p}} \frac{z^k}{k!} \frac{z'^l}{l!}.$$



On a donc

$$|u_p| \leq \sum_{\substack{k+l \leq 2p \\ k > p \text{ ou } l > p}} \frac{|z|^k}{k!} \frac{|z'|^l}{l!} \leq \left(\sum_{k=0}^p \frac{|z|^k}{k!} \right) \left(\sum_{l=p+1}^{2p} \frac{|z'|^l}{l!} \right) + \left(\sum_{k=p+1}^{2p} \frac{|z|^k}{k!} \right) \left(\sum_{l=0}^p \frac{|z'|^l}{l!} \right).$$

Or

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^p \frac{|z|^k}{k!} \right) = \exp(|z|), \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\sum_{l=0}^p \frac{|z'|^l}{l!} \right) = \exp(|z'|)$$

et

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=p+1}^{2p} \frac{|z|^k}{k!} \right) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\sum_{l=p+1}^{2p} \frac{|z'|^l}{l!} \right) = 0.$$

Par conséquent la suite $(u_p)_{p \in \mathbf{N}}$ tend vers 0 et $\exp(z+z') = \exp(z) \exp(z')$.

3.5. On déduit de 3.3 et de 3.4 que la fonction exponentielle, vue comme fonction de deux variables réelles, est différentiable une infinité de fois en tout point. On a

$$d \exp(z) \cdot u = \exp(z) \cdot u \text{ si } z, u \in \mathbf{C}$$

et si $p \in \mathbf{N}$ il existe une fonction $h \in \mathbf{C} \mapsto \varepsilon_p(h)$, continue et nulle en zéro, telle que si $z, h \in \mathbf{C}$ alors

$$\exp(z + h) = \exp(z) \left(\sum_{n=0}^p \frac{h^n}{n!} + |h|^p \varepsilon_p(h) \right).$$

3.6. On a immédiatement $\exp(0) = 1$.

3.6.a. Puisque

$$\sum_{n=0}^p \frac{x^n}{n!} \geq 1 + x \text{ si } x \in [0, +\infty)$$

on a à la limite

$$\exp(x) \geq 1 + x \text{ si } x \in]0, +\infty).$$

3.6.b Puisque

$$\sum_{n=0}^p \frac{\bar{z}^n}{n!} = \overline{\sum_{n=0}^p \frac{z^n}{n!}}$$

on a à la limite

$$\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)} \text{ si } z \in \mathbf{C}.$$

3.7. On déduit de 3.4 et de $\exp(0) = 1$ que pour tout $z \in \mathbf{C}$ $\exp(z)$ est un complexe non nul et son inverse est $\exp(-z)$. L'identité montrée en 3.4. signifie que l'application exponentielle est un morphisme du groupe additif $(\mathbf{C}, +)$ vers le groupe multiplicatif (\mathbf{C}^*, \times) .

Puisque l'exponentielle ne s'annule pas, on déduit de 3.3 et du théorème d'inversion locale que pour tout $z \in \mathbf{C}$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que la restriction de l'exponentielle au disque de centre z et de rayon ε est un difféomorphisme sur son image et son image est un ouvert qui contient $\exp(z)$.

On déduit de 3.6.a et 3.4 que si $x \in \mathbf{R}$ alors $\exp(x) > 0$, la restriction de l'exponentielle à \mathbf{R} est strictement croissante ($\exp(y) = \exp(x) \exp(y - x) > \exp(x) > 0$ si $x < y \in \mathbf{R}$) et

$$\lim_{x \in \mathbf{R} \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty, \quad \lim_{x \in \mathbf{R} \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0.$$

De plus, d'après 3.5, la restriction de l'exponentielle à \mathbf{R} est dérivable, de dérivée strictement positive : $\exp'(x) = \exp(x) > 0$ si $x \in \mathbf{R}$. Par conséquent $\exp : \mathbf{R} \rightarrow]0, +\infty)$ est une bijection et son inverse noté \ln (le logarithme) est dérivable et vérifie

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \text{ si } x, y \in]0, +\infty)$$

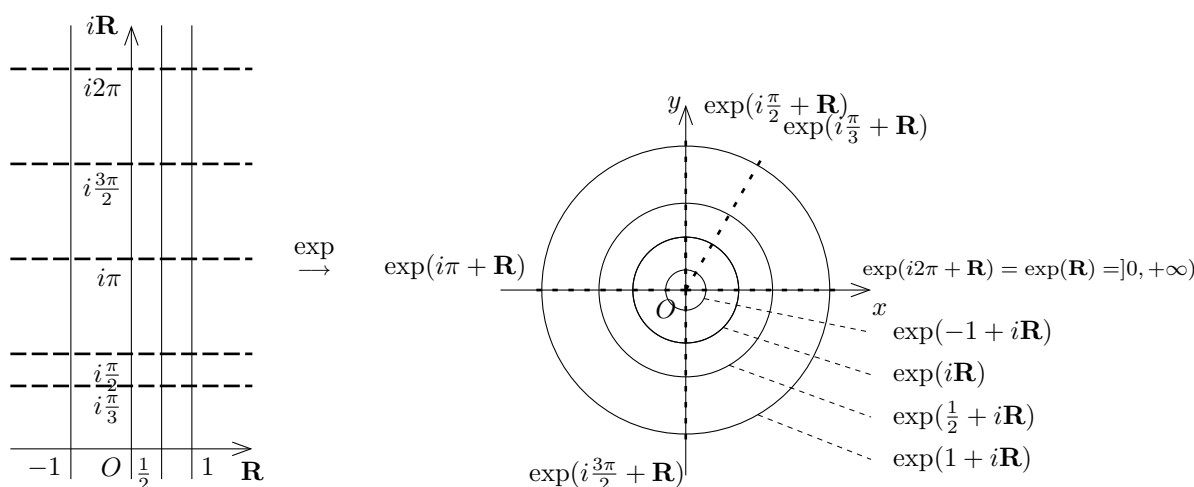
et

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \text{ si } x \in]0, +\infty).$$

3.8 On déduit de 3.4 et de 3.7 que l'image par l'exponentielle de la droite horizontale $\{\operatorname{Im}(z) = \lambda\}$ est la demi-droite

$$]0, +\infty) \exp(i\lambda) = \{r \exp(i\lambda) : r > 0\}.$$

On déduit de 3.4 et de 3.6.b que $|\exp(z)|^2 = \exp(z + \bar{z}) = \exp(2\operatorname{Re}(z))$ si $z \in \mathbf{C}$. Ainsi l'image par l'exponentielle de la droite verticale $\{\operatorname{Re}(z) = \lambda\}$ est incluse dans le cercle de rayon $\exp(\lambda)$, $C(\exp(\lambda)) = \{|z| = \exp(\lambda)\}$.



3.9. Si $x \in \mathbf{R}$ on pose $\exp(ix) = c(x) + is(x)$. Les fonctions c et s sont habituellement appelées cosinus et sinus. Si $x \in \mathbf{R}$ alors $c(x) - is(x) = \overline{\exp(-ix)} = \exp(-ix) = c(-x) + is(-x)$. Par conséquent c est paire et s impaire. Si $x \in \mathbf{R}$ alors $c^2(x) + s^2(x) = |\exp(ix)|^2 = 1$. D'après 3.4, si $x, y \in \mathbf{R}$

$$c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y), \quad s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y).$$

On déduit de 3.3 que les fonctions c et s sont dérivables une infinité de fois et vérifient $c' = -s$ et $s' = c$.

Montrons de deux façons que c s'annule sur $]0, +\infty)$.

preuve 1 On raisonne par l'absurde. Si c ne s'annule pas alors $c > 0$ puisque c est continue sur \mathbf{R} et $c(0) = 1$. Or $s' = c$. Par conséquent s est strictement croissante. En particulier si $x \geq 1$, $s(x) \geq s(1) > 0$. Mais $c' = -s$. Par conséquent $c(x) \leq c(1) - s(1)(x-1)$ si $x \geq 1$ et donc $c(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$. Ceci contredit l'identité $c^2(x) + s^2(x) = 1$. Ainsi c s'annule sur $]0, +\infty)$.

preuve 2 Puisque $s' = c$ on a $s'(0) = c(0) = 1$. Or la dérivée de s est continue. Il existe donc un intervalle $]0, \delta[$ sur lequel c et s' sont strictement positives. La restriction de s à $[0, \delta]$ est strictement croissante et $s([0, \delta]) =$

$]0, \varepsilon[$ avec $\varepsilon = s(\delta) > 0$. On considère la suite z_n définie en 3.1 et on pose $z_n = c_n + is_n$. Puisque $(s_n)_{n \geq 0}$ est strictement décroissante vers 0 il existe un entier n tel que $s_n \in]0, \varepsilon[$. Il existe donc $x \in]0, \delta[$ tel que $s(x) = s_n$. Or $s_n^2 + c_n^2 = 1 = s(x)^2 + c(x)^2$ alors que c_n et $c(x)$ sont strictement positifs. Ceci implique que $c(x) = c_n$ et $\exp(ix) = z_n$. On obtient en multipliant x par 2^n ou en élevant z_n à la puissance 2^n

$$\exp(2^n ix) = i, \quad c(2^n x) = 0 \text{ et } 2^n x > 0.$$

Puisque $c(0) = 1$ et que c est continue l'ensemble des zéros strictement positifs de c qui est non vide admet un plus petit élément noté ρ . Sur $]0, \rho[$ c est strictement positive. La fonction s est strictement croissante sur $[0, \rho]$ car $s' = c > 0$ sur $]0, \rho[$. Puisque $c(\rho) = 0$ et que $c^2(\rho) + s^2(\rho) = 1$, $s(\rho) = 1$. Ainsi $\exp(i\rho) = i$ et donc $\exp(2i\rho) = -1$, $\exp(3i\rho) = -i$ et $\exp(4i\rho) = 1$.

3.10. Puisque l'exponentielle est un morphisme de groupe, l'application $x \in \mathbf{R} \mapsto \exp(ix)$ est aussi un morphisme de groupe. Son noyau G est donc un sous-groupe de \mathbf{R} . C'est soit \mathbf{R} , soit $\{0\}$, soit un sous-groupe dense, soit un sous-groupe monogène de la forme $g\mathbf{Z}$ avec $g > 0$. Nous allons montrer que G est monogène et différent de $\{0\}$.

Le sous-groupe G est différent de $\{0\}$ car il contient le nombre 4ρ . Il n'est pas dense car si $x \in]0, \rho]$, $s(x) > 0$ et donc $\exp(ix) \neq 1$ et $x \notin G$. Le groupe G est donc monogène de la forme $g\mathbf{Z}$ avec $g > 0$.

Montrons que $g = 4\rho$. Vu le choix de g $\exp(i\frac{g}{4})$ est différent de 1. Or $1 = \exp(ig) = [\exp(i\frac{g}{4})]^4$. Par conséquent $\exp(i\frac{g}{4}) \in \{i, -i, -1\}$. D'autre part, $\exp(4i\rho) = 1$ et $\rho > 0$. Par conséquent 4ρ est dans $g\mathbf{Z}$ et $0 < g \leq 4\rho$. Or si $0 < g < 4\rho$ alors $0 < \frac{g}{4} < \rho$ et ceci implique que $c(\frac{g}{4}) > 0$ et donc que $\exp(i\frac{g}{4}) \notin \{i, -i, -1\}$. Ceci est impossible donc $g = 4\rho$.

3.11. Classiquement on appelle π le nombre $\frac{g}{2}$. Par construction l'application $x \in \mathbf{R} \mapsto \exp(ix)$ est 2π -périodique. Montrons que l'application $x \in [0, 2\pi[\mapsto \exp(ix)$ est une bijection sur le cercle unité $\{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$. Elle est injective car si $x < y \in [0, 2\pi[$ sont tels que $\exp(ix) = \exp(iy)$ alors $\exp(i(x-y)) = 1$, $y-x \in [0, 2\pi[\cap 2\pi\mathbf{Z}$ et donc $x = y$. On sait que $\exp(i0) = 1$. Soit $z \neq 1$ de module 1. Puisque $c(0) = 1$ et $c(\pi) = -1$ ($\exp(i\pi) = -1$), d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $x \in]0, \pi]$ tel que $c(x) = \operatorname{Re}(z)$. Alors $s(x)$ ou $s(-x) = -s(x)$ est égal à $\operatorname{Im}(z)$. Par conséquent soit $\exp(ix)$, soit $\exp(-ix)$ est égal à z . Or $\exp(-ix) = \exp(i(2\pi-x))$ et x ainsi que $2\pi-x$ appartiennent à $[0, 2\pi[$. Ainsi il existe x' dans $[0, 2\pi[$ (égal à x ou à $2\pi-x$) tel que $\exp(ix') = z$.

On verra plus loin la relation entre π et le périmètre du cercle unité.

4. Réduction des formes quadratiques définies positives par deux méthodes (une méthode analytique avec le groupe du mercredi et une méthode algébrique avec celui du jeudi).

Le produit scalaire usuel de \mathbf{R}^n est défini par

$$(u|v) = \sum_{i=1}^n u_i v_i$$

si $u = (u_1, \dots, u_n)$ et $v = (v_1, \dots, v_n)$ sont des vecteurs de \mathbf{R}^n . Si $u \neq 0$ alors $(u|u) \neq 0$. On dit que u et v sont orthogonaux si $(u|v) = 0$. Une famille de vecteurs est dite orthogonale si les vecteurs qui la composent sont deux à deux orthogonaux. Si (v_1, \dots, v_p) est une famille orthogonale alors

$$\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i v_i \middle| \sum_{i=1}^p \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^p \lambda_i^2 (v_i|v_i).$$

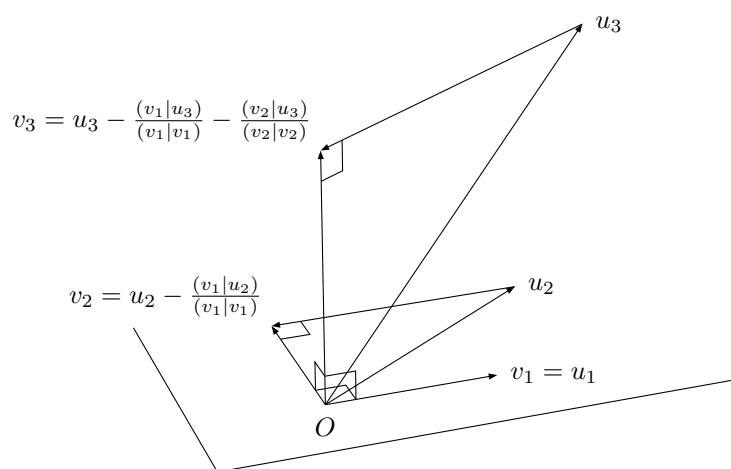
Ainsi une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Une base orthogonale est une base qui est une famille orthogonale. Elle est dite orthonormale si de plus pour tout vecteur u de la base $(u|u) = 1$. La base usuelle de \mathbf{R}^n formée des vecteurs B_i dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la i -ème qui vaut 1 est orthonormale.

L'ensemble des vecteurs orthogonaux à un vecteur non nul u est un hyperplan vectoriel noté u^\perp : l'hyperplan u^\perp est le noyau de la forme linéaire $l_u(v) = (u|v)$.

Soient u_1, \dots, u_p des vecteurs linéairement indépendants. Montrons qu'il existe v_1, \dots, v_p linéairement indépendants et orthogonaux deux à deux tels que pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$ les familles (u_1, \dots, u_k) et (v_1, \dots, v_k) engendrent les mêmes sous-espaces vectoriels. Ce résultat (procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt) se montre par récurrence sur p . Au rang $p = 1$ on prend $v_1 = u_1$. Soit $p > 1$ et supposons le résultat vrai jusqu'au rang $p - 1$. On a donc construit v_1, \dots, v_{p-1} . Le vecteur

$$v_p = u_p - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{(v_i|u_p)}{(v_i|v_i)} v_i$$

convient. Ce résultat combiné au théorème de la base incomplète montre que si (v_1, \dots, v_p) est une famille orthogonale il existe v_{p+1}, \dots, v_n tels que (v_1, \dots, v_n) soit une base orthogonale. La famille $(\frac{v_1}{|v_1|}, \dots, \frac{v_n}{|v_n|})$ est une base orthonormale.



Soient u_1, \dots, u_p des vecteurs linéairement indépendants. Ils engendrent un sous-espace vectoriel U de dimension p . Les formes linéaires l_{u_1}, \dots, l_{u_p} sont linéairement indépendantes. L'intersection de leurs noyaux est un sous-espace vectoriel de dimension $n - p$ appelé orthogonal de U et noté $U^\perp : v \in U^\perp$ si et seulement si $(u|v) = 0$ pour tout $u \in U$. D'après ce qui précède $U \oplus U^\perp = \mathbf{R}^n$. En effet on considère une base orthogonale (v_1, \dots, v_n) telle que (v_1, \dots, v_p) engendre U . Alors (v_{p+1}, \dots, v_n) engendre un sous-espace de U^\perp de même dimension que U^\perp . Ils sont donc égaux. Ainsi U et U^\perp sont bien en somme directe.

Le groupe orthogonal $O_n(\mathbf{R})$ est le sous-groupe de $GL_n(\mathbf{R})$ formé des matrices R telles que $R^t = R^{-1}$ c'est à dire $O_n(\mathbf{R}) = \{R \in M_n(\mathbf{R}) : R^t R = Id\}$. On vérifie immédiatement qu'une matrice est orthogonale si ses vecteurs colonnes forment une base orthonormale pour le produit scalaire usuel de \mathbf{R}^n . Le groupe orthogonal préserve le produit scalaire : Si $R \in O_n(\mathbf{R}^n)$ et $u, v \in \mathbf{R}^n$ alors

$$(u|v) = u^t v = u^t (R^{-1} R) v = u^t (R^t R) v = (Ru)^t (Rv) = (Ru|Rv).$$

Inversement, un élément R de $M_n(\mathbf{R})$ qui préserve le produit scalaire est une matrice orthogonale. En particulier si R est la matrice des coordonnées dans une base orthonormale \mathcal{B} des vecteurs d'une base orthonormale \mathcal{B}' alors $R \in O_n(\mathbf{R})$.

Toute matrice carrée $M \in M_n(\mathbf{C})$ admet au moins une valeur propre complexe. Il suffit de considérer une racine λ du polynôme $P(z) = \det(zId - M)$. Le théorème fondamental de l'algèbre (dit de d'Alembert-Gauss) assure l'existence d'une telle racine. Montrons ce résultat sans recours à la notion de déterminant ou au théorème de Cayley-Hamilton. L'espace vectoriel $M_n(\mathbf{C})$ est de dimension finie (n^2). Par conséquent la famille $Id, M, M^2, \dots, M^{n^2}$ est liée. Soit $p(z) = p_0 + \dots + p_{d-1}z^{d-1} + z^d$ de degré minimal tel que $p_0 Id + \dots + p_{d-1}M^{d-1} + M^d = 0$. D'après le théorème fondamental de l'algèbre (dit de d'Alembert-Gauss) le polynôme p admet au moins une racine complexe λ . Il existe donc un polynôme $q(z) = q_0 + \dots + q_{d-2}z^{d-2} + z^{d-1}$ de degré $d - 1$ tel que $p(z) = (z - \lambda)q(z)$. On a $(M - \lambda Id)(q_0 Id + \dots + q_{d-2}M^{d-2} + M^{d-1}) = 0$. L'hypothèse de minimalité de d implique que $q_0 Id + \dots + q_{d-2}M^{d-2} + M^{d-1} \neq 0$. Par conséquent il existe $U, V \in \mathbf{C}^n \setminus \{0\}$ tels que $(q_0 Id + \dots + q_{d-2}M^{d-2} + M^{d-1})U = V$ et $MV - \lambda V = 0$. Ceci montre que λ est une valeur propre de M et que V est un vecteur propre qui lui est associé.

Une matrice $S \in M_n(\mathbf{R})$ est une matrice symétrique si $s_{ij} = s_{ji}$ pour tous les $i, j \in \{1, \dots, n\}$. De plus si $u, v \in \mathbf{R}^n$ alors $u^t S v = u^t S^t v = (u^t S^t) v = (S u)^t v = v^t S u$.

Soit $S \in M_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique. D'après ce qui précède S admet des valeurs propres complexes. Montrons que toute valeur propre est réelle et admet un vecteur propre réel. Soit $\lambda \in \mathbf{C}$ une valeur propre de S et $Z \in \mathbf{C}^n \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé : $\lambda Z = S Z$ alors par conjugaison on trouve $\bar{\lambda} \bar{Z} = S \bar{Z}$ (car M à coefficients réels). Donc $Z^t (S \bar{Z}) = \bar{\lambda} (Z^t \bar{Z}) = \bar{\lambda} (|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2)$. Mais puisque S est symétrique on a aussi $Z^t (S \bar{Z}) = (S Z)^t \bar{Z} = \lambda (Z^t \bar{Z}) = \lambda (|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2)$. Ainsi $(\lambda - \bar{\lambda})(|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2) = 0$. Puisque $Z \neq 0$ alors $|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 \neq 0$ et $\lambda - \bar{\lambda} = 0$ donc λ réelle. On a $Z = X + iY$ avec $X, Y \in \mathbf{R}^n$. Puisque λ est réelle, l'égalité $\lambda Z = S Z$ se décompose en $\lambda X = S X$ et $\lambda Y = S Y$. Puisque $Z \neq 0$, X ou Y n'est pas nul.

Celui qui n'est pas nul est un vecteur propre réel associé à λ .

Si $S \in M_n(\mathbf{R})$ est une matrice symétrique et $R \in O_n(\mathbf{R})$ une matrice orthogonale alors $S' = (s'_{ij}) = R^{-1}SR$ est symétrique. En effet si on note B_i le vecteur dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la i -ème qui vaut 1 alors on a $s'_{ij} = B_i^t(R^{-1}SR)B_j = B_i^t(R^tSR)B_j = (RB_i)^tS(RB_j)$. De même on a $s'_{ji} = (RB_j)^tS(RB_i)$. Or puisque S est symétrique $(RB_j)^tS(RB_i) = (RB_i)^tS(RB_j)$. Ainsi $s'_{ij} = s'_{ji}$ et S' est symétrique.

Nous sommes en mesure de prouver que si $S \in M_n(\mathbf{R})$ est une matrice symétrique alors elle est orthodagonalisable dans \mathbf{R} : il existe une matrice diagonale $D \in M_n(\mathbf{R})$ et une matrice orthogonale $R \in O_n(\mathbf{R})$ telles que $D = R^{-1}SR$.

La preuve se fait par récurrence sur la dimension n . Si $n = 1$ c'est immédiat. Soit $n > 1$. Supposons avoir prouvé le résultat jusqu'au rang $n - 1$ et considérons une matrice symétrique $S \in M_n(\mathbf{R})$. Elle admet un vecteur propre v_1 de norme 1. On note λ_1 sa valeur propre. Soit (v_2, \dots, v_n) telle que (v_1, \dots, v_n) soit une base orthonormale de \mathbf{R}^n . On note V la matrice des coordonnées des vecteurs v_i . Puisque (v_1, \dots, v_n) est une base orthonormale la matrice V est orthogonale. On considère la matrice $S' = V^{-1}SV$. Puisque les v_i forment une base orthonormale la matrice S' est symétrique. Puisque v_1 est un vecteur propre la matrice S' est de la forme

$$\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & S'' \end{array} \right)$$

où $S'' \in M_{n-1}(\mathbf{R})$. Puisque S' est symétrique c'est le cas aussi pour S'' . D'après l'hypothèse de récurrence il existe une matrice diagonale $D'' \in M_{n-1}(\mathbf{R})$ et une matrice orthogonale $R'' \in O_{n-1}(\mathbf{R})$ telles que $D'' = R''^{-1}S''R''$. On pose

$$R = V \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & R'' \end{array} \right).$$

Alors R est orthogonale et

$$\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & D'' \end{array} \right) = R^{-1}SR.$$

Soit $q : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ une forme quadratique non nulle. C'est un polynôme homogène de degré 2. Soit b la forme bilinéaire symétrique associée :

$$b(u, v) = \frac{1}{4}(q(u + v) - q(u - v)) \text{ si } u, v \in \mathbf{R}^n.$$

Inversement toute forme bilinéaire définit une forme quadratique en posant $q(u) = b(u, u)$. Si $g \in GL_n(\mathbf{R})$ alors $q \circ g$ est encore une forme quadratique non

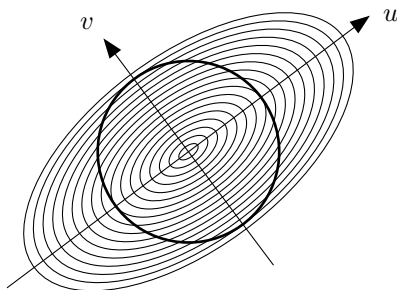
nulle et $b \circ (g, g)$ est la forme bilinéaire symétrique associée. Si $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ est une base de \mathbf{R}^n alors il existe une matrice symétrique $S_{\mathcal{B}} = (s_{ij})$ ($s_{ij} = s_{ji}$ si $i, j \in \{1, \dots, n\}$) telle que si $u, v \in \mathbf{R}^n$ et si U et V sont les coordonnées de ces vecteurs dans la base \mathcal{B} alors

$$q(u, v) = U^t S_{\mathcal{B}} V.$$

Si $i, j \in \{1, \dots, n\}$ alors $s_{ij} = q(b_i, b_j)$. Fixons un élément g de $GL_n(\mathbf{R})$ et une base \mathcal{B} . Si $S_{\mathcal{B}}$ est la matrice de b relativement à la base \mathcal{B} et $P_{\mathcal{B}}$ la matrice de g relativement à cette base alors $P_{\mathcal{B}}^t S_{\mathcal{B}} P_{\mathcal{B}}$ est la matrice de $b \circ (g, g)$ relativement à cette base. Si \mathcal{B}' est une seconde base et $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ est la matrice des coordonnées des vecteurs de \mathcal{B}' dans la base \mathcal{B} alors $S_{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^t S_{\mathcal{B}} P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ est la matrice de b relativement à la base \mathcal{B}' .

On sait qu'il existe une matrice diagonale $D \in M_n(\mathbf{R})$ et une matrice orthogonale $R \in O_n(\mathbf{R})$ telles que $D = R^{-1} S R$. Puisque R est orthogonale on a $R^{-1} = R^t$ et donc $D = R^t S R$. De plus R est la matrice des coordonnées des vecteurs d'une base orthonormale \mathcal{B} relativement à la base usuelle qui est orthonormale pour le produit scalaire usuel.

On vient de prouver que si q est une forme quadratique et b la forme bilinéaire associée il existe une base orthonormale (v_1, \dots, v_n) telle que $b(v_i, v_j) = 0$ si $i \neq j$. Une telle base est dite q -orthogonale.



cercle unité, niveaux d'une forme quadratiques q
et base simultanément orthogonale et q -orthogonale ($(u|v) = b(u, v) = 0$)

Voici une seconde façon plus topologique d'obtenir le résultat.

Elle repose sur la compacité de la sphère $S_{n-1} = \{u \in \mathbf{R}^n = (u|u) = 1\}$ et nécessite de connaître les propriétés de la norme euclidienne $\|u\| = \sqrt{(u|u)} : \|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$, $||u\| - \|v\|| \leq \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ et $\|u\| \neq 0$ si $u \neq 0$.

Soit q une forme quadratique et b la forme bilinéaire associée. La restriction de q à S_{n-1} est une application continue sur un compact. Elle atteint un maximum en un vecteur v . Soit u un vecteur unitaire et orthogonal à v : $\|u\| = 1$ et $(u|v) = 0$. Si $t \in \mathbf{R}$ on note w_t le vecteur unitaire

$$w_t = \frac{v + tu}{\|v + tu\|}$$

et on pose $f(t) = q(w_t)$. On a

$$f(t) = \frac{q(v) + 2tb(u, v) + t^2q(u)}{1 + t^2}.$$

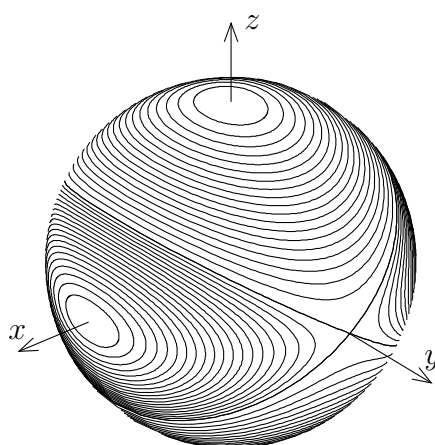
La fonction f est dérivable et puisque v est un maximum de la restriction de q à S_{n-1} la fonction f atteint un maximum en $t = 0$ et $f'(0) = 0$. Or $f'(0) = 2b(u, v)$. Ainsi on vient de prouver que si u appartient à l'hyperplan orthogonal v^\perp alors $b(u, v) = 0$. On en déduit que la matrice $S_{\mathcal{B}}$ de b relativement à une base orthonormale \mathcal{B} dont le premier vecteur est v est de la forme

$$S_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & S \end{array} \right)$$

où $S \in M_{n-1}(\mathbf{R})$ est une matrice symétrique qui représente la forme bilinéaire $b|_{v^\perp}$ associée à la restriction $q|_{v^\perp}$ à l'hyperplan v^\perp de la forme quadratique q . Un raisonnement par récurrence sur la dimension permet de choisir une base orthonormale $\mathcal{B}' = (v_2, \dots, v_n)$ de v^\perp relativement à laquelle la matrice $S_{\mathcal{B}'}$ de $b|_{v^\perp}$ est diagonale. On note \mathcal{B}'' la base orthonormale (v, v_2, \dots, v_n) de \mathbf{R}^n . La matrice de b relativement à cette base est

$$S_{\mathcal{B}''} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & S_{\mathcal{B}'} \end{array} \right)$$

qui est diagonale. On vient encore de prouver que si q est une forme quadratique et b la forme bilinéaire associée il existe une base orthonormale (v_1, \dots, v_n) telle que $b(v_i, v_j) = 0$ si $i \neq j$.



niveaux de la forme quadratique $x^2 + 2y^2 + 4z^2$
restreinte à la sphere unité

5. Produit scalaire, espaces vectoriels et espaces affines euclidiens et leurs topologies, sphères et cercles.

Si E est un espace vectoriel de dimension n sur \mathbf{R} on appelle produit scalaire sur E une forme bilinéaire q strictement positive : si $u \neq 0$, $b(u, u) > 0$. Quitte à fixer une base et à raisonner avec des coordonnées, on peut supposer être dans \mathbf{R}^n . On sait qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ relativement à laquelle la matrice de b est diagonale. Les termes diagonaux sont strictement positifs en raison de la stricte positivité de b . On considère la base \mathcal{B}' formée des vecteurs $u_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$. Relativement à cette base la matrice représentant b est l'identité. Ceci signifie que quitte à bien choisir la base le produit scalaire b est le produit scalaire usuel sur \mathbf{R}^n .

On considère le produit scalaire usuel de \mathbf{R}^n . On va montrer l'inégalité triangulaire. On établira au passage l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Soit $u, v \in \mathbf{R}^n$ et $t \in \mathbf{R}$. Si u et v sont colinéaires, par exemple $v = \lambda u$ alors $(u|v) = \lambda(u|u) \leq \|u\| \cdot \|v\|$ et il y a égalité si et seulement si $\lambda \geq 0$ ou $u = 0$. Supposons que u et v ne sont pas colinéaires. Pour tout $t \in \mathbf{R}$ le vecteur $u + tv$ est non nul donc $(u + tv|u + tv) > 0$. En développant par bilinéarité on a $p(t) = (u|u) + 2(u|v)t + (v|v)t^2 > 0$. Par conséquent le discriminant réduit $(u|v)^2 - (u|u)(v|v)$ est strictement négatif ou nul donc $(u|v) < \|u\| \cdot \|v\|$. Finalement si $u, v \in \mathbf{R}^n$ alors

$$(u|v) \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

est il y a égalité si et seulement si u et v sont colinéaires et de même sens (inégalité de Cauchy-Schwarz). Soit $u, v \in \mathbf{R}^n$. On a

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2(u|v) \\ &\geq \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\| \cdot \|v\| \quad (\text{Cauchy-Schwarz}) \\ &\geq \left| \|u\| - \|v\| \right|^2 \end{aligned}$$

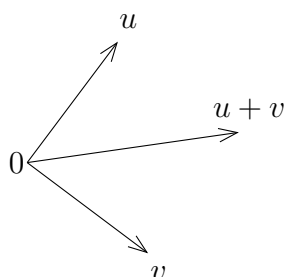
et

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2(u|v) \\ &\leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\| \cdot \|v\| \quad (\text{Cauchy-Schwarz}) \\ &\leq (\|u\| + \|v\|)^2. \end{aligned}$$

En prenant les racines et en raisonnant on obtient

$$\left| \|u\| - \|v\| \right| \leq \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

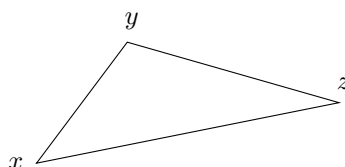
et $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$ si et seulement si u et v colinéaires et de même sens.



L'espace vectoriel \mathbf{R}^n muni de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ est appelé espace vectoriel euclidien. On munit l'espace affine \mathbf{R}^n d'une topologie métrique associée au produit scalaire de la façon suivante. Si $x, y \in \mathbf{R}^n$ la distance (euclidienne) de x à y est $d(x, y) = \|\vec{xy}\|$. L'inégalité triangulaire devient

$$\|d(x, y) - d(y, z)\| \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

et $d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$ si et seulement si $y \in [x, z]$.



Si $x \in \mathbf{R}^n$ et $r \in \mathbf{R}$, l'ensemble $B(x, r) = \{y \in \mathbf{R}^n : d(x, y) < r\}$ s'appelle boule ouverte de rayon r et de centre x . Il est non vide si et seulement si $r > 0$. Un sous-ensemble U de \mathbf{R}^n est un ouvert si pour tout $x \in U$ il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$.



un ouvert de \mathbf{R}^2 un sous-ensemble de \mathbf{R}^2
qui n'est probablement pas ouvert

La famille des ouverts de \mathbf{R}^n est stable par union quelconque et intersection finie, elle contient le vide et \mathbf{R}^n . C'est bien une topologie. Les fermés sont les complémentaires des ouverts. La famille des fermés de \mathbf{R}^n est stable par intersection quelconque et union finie, elle contient le vide et \mathbf{R}^n . Les boules fermées $\overline{B}(x, r) = \{y \in \mathbf{R}^n : d(x, y) \leq r\}$ sont des fermés de \mathbf{R}^n . On appelle sphère de centre x et de rayon l'ensemble $S(x, r) = \{y \in \mathbf{R}^n : d(x, y) = r\}$. C'est un sous-ensemble fermé de \mathbf{R}^n . Si $n = 2$ on parle de cercle. L'espace affine \mathbf{R}^n muni de la distance euclidienne s'appelle espace affine euclidien.

6. Le groupe orthogonal en dimension n , 2 et 3.

Si $R \in O_n(\mathbf{R})$ alors R conserve le produit scalaire donc ses seules valeurs propres réelles possibles sont 1 et -1 et ses valeurs propres complexes sont de module 1. Puisque R est à coefficients réels, si $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ est une valeur propre de R et X un vecteur propre associé ($X \in \mathbf{C}^n \setminus \mathbf{R}^n$ alors \bar{X} est un vecteur propre associé à $\bar{\lambda}$). De plus comme R préserve le produit scalaire, $(\bar{X}|X) = (R\bar{X}|RX) = (R\bar{X})^t RX = |\lambda|^2 \cdot (\bar{X}|X)$ donc λ est de module 1 : $\lambda = \exp(i\theta)$. Son déterminant qui est le produit des valeurs propres complexes comptées avec multiplicité est nécessairement 1 ou -1 . On peut le voir plus simplement en utilisant le fait que $\det(R) = \det(R^t)$ (c'est vrai pour toute matrice) et $\det(R^t) = \det(R^{-1})$ (ce n'est pas vraie pour toutes les matrices mais pour certaines dont les matrices orthogonales mais pas seulement (peser à $\begin{pmatrix} 11 \\ 01 \end{pmatrix}$)). Par conséquent $1 = \det(R) \det(R^{-1}) = (\det(R))^2$ et $\det(R) \in \{-1, 1\}$.

En dimension 2 l'équation $R^t R = Id$ a pour solutions les matrices du type $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$. Les matrices du premier type sont les matrices de rotation. Elles préservent l'orientation et elles n'ont pas de vecteur propre réel (sauf l'identité). Celles du second type sont des involutions, les symétries orthogonales (elles inversent l'orientation). Elles ont deux valeurs propres distinctes 1 et -1 .

En dimension 3 le polynôme $\det(zId - R)$ est de degré impair et il admet au moins une racine réelle, 1 ou -1 .

Supposons que 1 est valeur propre. Soit (u_1, u_2, u_3) une base orthonormale telle que u_3 soit un vecteur propre associé à 1. Puisque R préserve l'orthogonalité le plan engendré par u_1 et u_2 est invariant. Soit R induit sur ce plan une rotation ($\det(R) = 1$) soit R induit sur ce plan une involution. Dans ce cas $\det R = -1$ et R possède un second vecteur propre associé à 1 et un vecteur propre associé à la valeur propre -1 . Il sont dans le plan défini par u_1 et u_2 et ils sont orthogonaux. On peut supposer que c'est u_1 (pour la valeur propre -1) et u_2 (pour la valeur propre 1). Ainsi R est une symétrie orthogonale par rapport au plan engendré par u_2 et u_3 .

Si 1 n'est pas valeur propre alors -1 l'est. Si -1 possède trois vecteurs propres alors $R = -Id$ est une symétrie ponctuelle. Le cas où il existe exactement deux vecteurs propres associés à -1 est traité : c'est le cas de la symétrie orthogonale par rapport à un plan (et 1 est alors valeur propre...). Supposons que 1 n'est pas valeur propre et -1 est la seule valeur propre réelle. On considère une base orthonormale (u_1, u_2, u_3) telle que u_3 soit un vecteur propre associé à -1 . Puisque R préserve l'orthogonalité le plan engendré par u_1 et u_2 est invariant. Nécessairement R induit sur ce plan une rotation différente de l'identité et du demi-tour.

7. Les sous-groupes finis de $GL_n(\mathbf{R})$ sont conjugués à des sous-groupes du groupe orthogonal.

On désigne par $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire usuel sur \mathbf{R}^n .

Soit $G = \{g_1, \dots, g_d\}$ un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbf{R})$. Si $u, v \in \mathbf{R}^n$ on pose

$$(u|v)_G = \sum_{i=1}^d (g_i(u)|g_i(v)).$$

L'application $(\cdot|\cdot)_G$ est invariante sous l'action du groupe G . En effet si $g_j \in G$ alors l'application qui à $g_i \in G$ associe $g_i \circ g_j$ est une bijection de G dans lui-même. Il existe une permutation σ_j de $\{1, \dots, d\}$ telle que $g_i \circ g_j = g_{\sigma_j(i)}$. Par conséquent si $u, v \in \mathbf{R}^n$ on a

$$\begin{aligned} (g_j(u)|g_j(v))_G &= \sum_{i=1}^d (g_i(g_j(u))|g_i(g_j(v))) \\ &= \sum_{i=1}^d (g_i \circ g_j(u)|g_i \circ g_j(v)) \\ &= \sum_{i=1}^d (g_{\sigma_j(i)}(u)|g_{\sigma_j(i)}(v)) \\ &= \sum_{k=1}^d (g_k(u)|g_k(v)) \\ &= (u|v)_G. \end{aligned}$$

L'application $(\cdot|\cdot)_G$ est un produit scalaire :

- symétrie

$$(u|v)_G = \sum_{i=1}^d (g_i(u)|g_i(v)) = \sum_{i=1}^d (g_i(v)|g_i(u)) = (v|u)_G$$

- linéarité

$$\begin{aligned} (u|\lambda v + \mu w)_G &= \sum_{i=1}^d (g_i(u)|g_i(\lambda v + \mu w)) \\ &= \sum_{i=1}^d (g_i(u)|\lambda g_i(v) + \mu g_i(w)) \\ &= \sum_{i=1}^d \lambda (g_i(u)|g_i(v)) + \mu (g_i(u)|g_i(w)) \\ &= \lambda \left(\sum_{i=1}^d (g_i(u)|g_i(v)) \right) + \mu \left(\sum_{i=1}^d (g_i(u)|g_i(w)) \right) \\ &= \lambda (u|v)_G + \mu (u|w)_G \end{aligned}$$

- stricte positivité : si $u \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ alors pour tout $g_i \in G \subset GL_n(\mathbf{R})$ on a $g_i(u) \neq 0$ et donc $(g_i(u)|g_i(u)) > 0$. En sommant sur $i \in \{1, \dots, d\}$ on obtient

$$(u|u)_G = \sum_{i=1}^d (g_i(u)|g_i(u)) > 0 \text{ si } u \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}.$$

Finalement on vient de prouver que les éléments de G préservent le produit scalaire $(\cdot|\cdot)_G$. Par conséquent G un sous-groupe du groupe orthogonal associé à ce produit scalaire. Or deux groupes orthogonaux associés à des produits scalaires définis sur des espaces vectoriels de même dimension sont conjugués. Ceci permet de conclure

8. Les groupes compacts de $GL_n(\mathbf{R})$ de la forme $\overline{\langle g \rangle}$ sont conjugués à des sous-groupes du groupe orthogonal (application de la triangulation des endomorphismes).

Une topologie \mathcal{T} sur un ensemble X est une famille de sous-ensembles de X qui vérifie les propriétés suivantes. Le vide et X sont des éléments de \mathcal{T} . Une union quelconque d'éléments de \mathcal{T} est dans \mathcal{T} . C'est aussi le cas d'une intersection finie d'éléments de \mathcal{T} . Les éléments de \mathcal{T} sont appelés ouverts et leur complémentaires les fermés. Le couple (X, \mathcal{T}) est appelé espace topologique. Si $X' \subset X$ on appelle topologie induite sur X' par \mathcal{T} la famille des $X' \cap U$ avec $U \in \mathcal{T}$. C'est bien une topologie. Si $Y \subset X$, l'intérieur de Y est le plus grand ouvert contenu dans Y et l'adhérence ou la fermeture de Y est le plus petit qui le contient. Une application f entre deux espaces topologiques (X, \mathcal{T}) et (X', \mathcal{T}') est continue si l'image réciproque de tout ouvert de X' est un ouvert de X .

Les espaces vectoriels de dimension finie sur \mathbf{C} peuvent être vus comme des espaces vectoriels réels de dimension finie. On peut alors les munir d'une norme euclidienne donc d'une topologie. Les ouverts sont les unions quelconques de boules ouvertes. La définition de fonction continue à l'aide des images réciproques des ouverts est équivalente à celle que l'on donne avec les image réciproque des boules ouvertes ou avec les ε et les δ . De plus, puisqu'on est en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Ceci entraîne que la notion d'ouvert ne va pas dépendre de la norme choisie.

Un espace topologique est compact si de tout recouvrement par des ouverts on peut en extraire un recouvrement fini. L'image d'un compact par une application continue est un compact. Dans le cas des sous-ensembles de \mathbf{R}^n ou d'un espace vectoriel réel de dimension finie la caractérisation de la compacité peut se faire de plusieurs façons. Les compacts d'un espace vectoriel de dimension finie sont les sous-ensembles fermés et bornés. Ils admettent aussi la caractérisation séquentielle suivante : $K \subset \mathbf{R}^n$ est compact si et seulement si de toute suite on peut extraire une suite convergente. Par exemple, si un sous-ensemble G de $M \in M_n(\mathbf{C})$ ou de $M \in M_n(\mathbf{R})$ est compact alors il existe une constante qui majore les coefficients des éléments de G . Inversement cette condition implique que l'adhérence \overline{G} de G (c'est à dire le plus petit fermé qui le contient) est compacte.

Il est aussi utile de savoir que toute matrice $M \in M_n(\mathbf{C})$ est trigonalisable. Enfin on utilise que si $M \in M_n(\mathbf{C})$ alors les applications $X \in M_n(\mathbf{C}) \mapsto MX$ et $X \in M_n(\mathbf{C}) \mapsto MX$ sont continues et si $u \in \mathbf{C}^n$ alors l'application $X \in M_n(\mathbf{C}) \mapsto Xu$ est continue. En particulier si $P \in GL_n(\mathbf{C})$ alors l'application $X \in M_n(\mathbf{C}) \mapsto P^{-1}XP$ est continue.

Soit $g \in GL_n(\mathbf{R})$ qui engendre un groupe dont l'adhérence est compacte. Ceci signifie que la suite $(g^k)_{k \geq 0}$ et la suite $(g^{-k})_{k \geq 0}$ sont bornées. Nous allons montrer que ceci implique qu'il existe un produit scalaire pour lequel g est une isométrie : en d'autres termes, il existe $P \in GL_n(\mathbf{R})$ tel que $P^{-1}gP \in O_n(\mathbf{R})$.

Montrons que g est diagonalisable et que ses valeurs propres sont toutes de module 1. La matrice g est trigonalisable dans \mathbf{C} : Il existe $Q \in GL_n(\mathbf{C})$ et $T \in GL_n(\mathbf{C})$ triangulaire supérieure telle que $T = Q^{-1}gQ$ et $T^{-1} = Q^{-1}g^{-1}Q$. Si $k \in \mathbf{N}$, $T^k = Q^{-1}g^kQ$ et $T^{-k} = Q^{-1}g^{-k}Q$ et sont des matrices triangulaires supérieures. De plus si λ est une valeur propre de g alors c'est un terme sur la diagonale de T , λ^k est un terme de la diagonale de T^k et λ^{-k} est un terme de la diagonale de T^{-k} . Puisque les suites $(g^k)_{k \geq 0}$ $(g^{-k})_{k \geq 0}$

sont bornées il en est de même des suites $(T^k)_{k \geq 0}$ et $(T^{-k})_{k \geq 0}$ et des suites $(\lambda^k)_{k \geq 0}$ et $(\lambda^{-k})_{k \geq 0}$ qui sont des suites de termes diagonaux des matrices T^k et T^{-k} . Par conséquent nécessairement $|\lambda| = 1$. Si T n'est pas diagonale il existe une valeur propre λ et un vecteur u tel que $(T - \lambda Id)(u) \neq 0$ mais $(T - \lambda Id)^2(u) = 0$. On pose $v = (T - \lambda Id)(u)$. On a $T(u) = \lambda u + v$ et $T(v) = \lambda v$. Alors on a $T^k(u) = \lambda^k u + k\lambda^{k-1}v$. On a

$$\begin{aligned} \|T^k(u)\| &= \|\lambda^k u + k\lambda^{k-1}v\| \\ &\geq \left| \|\lambda^k u\| - \|k\lambda^{k-1}v\| \right| \\ &\geq k \left| \frac{\|u\|}{k} - \|v\| \right|. \end{aligned}$$

Par conséquent la suite $(\|T^k(u)\|)_{k \geq 0}$ tend vers $+\infty$ alors qu'elle devrait être bornée. Ainsi T est diagonale et g est bien diagonalisable et ses valeurs propres sont de module 1.

Soit $Z = u + iv$ un vecteur propre de g . Il est associé à une valeur propre de la forme $\lambda = \exp(i\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Si $\lambda = 1$ ou -1 on peut choisir $Z = u \in \mathbf{R}^n$. Si $\lambda \neq 1$ et -1 alors $Z \in \mathbf{C}^n \setminus \mathbf{R}^n$ et on a

$$\begin{aligned} g(u) + ig(v) &= g(u + iv) \\ &= g(Z) \\ &= \lambda Z \\ &= (\cos(\theta) + i\sin(\theta))(u + iv) \\ &= (\cos(\theta)u - \sin(\theta)v) + i(\sin(\theta)u + \cos(\theta)v). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} g(u) &= \cos(\theta)u - \sin(\theta)v \\ g(v) &= \sin(\theta)u + \cos(\theta)v. \end{aligned}$$

La restriction de g au plan réel engendré par u et v est une rotation d'angle θ . Finalement la matrice de g dans la base \mathcal{B} formée de ses vecteurs propres réels et des parties réelles et imaginaires des vecteurs propres associés aux valeurs propres non réelles est la matrice $R \in O_n(\mathbf{R})$ d'une isométrie. Soit $P_{\mathcal{B}}$ la matrice des coordonnées des vecteurs de \mathcal{B} dans la base usuelle de \mathbf{R}^n . On a

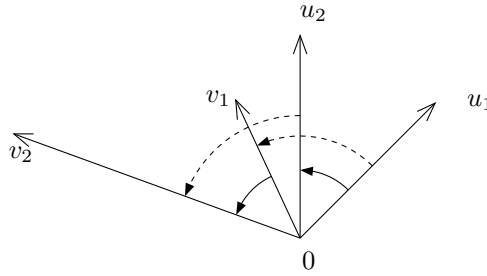
$$R = P_{\mathcal{B}}^{-1} g P_{\mathcal{B}}.$$

9. Les angles de vecteurs, de demi-droites, de droites et géométriques.

Angles orientés

On munit \mathbf{R}^2 d'une structure vectorielle euclidienne en considérant que $\mathcal{B} = ((1, 0), (0, 1))$ est une base orthonormée. On identifie \mathbf{R}^2 à \mathbf{C} en identifiant $(1, 0) \in \mathbf{R}^2$ à $1 \in \mathbf{C}$ et $(0, 1) \in \mathbf{R}^2$ à $i \in \mathbf{C}$. On note S_1 le cercle unité : $S_1 = \{|z| = 1\}$ ou $S_1 = \{x^2 + y^2 = 1\}$. Le cercle unité est stable par multiplication. Muni de cette loi, c'est un groupe commutatif. L'application $\exp(it)$ est un morphisme surjectif de groupes commutatifs de $(\mathbf{R}, +)$ dans (S_1, \times) dont le noyau est $2\pi\mathbf{Z}$. On note \mathcal{O} le groupe des isométries vectorielles. Ce groupe est isomorphe au groupe des matrices orthogonales : toute matrice orthogonale est la matrice d'une isométrie relativement à la base \mathcal{B} et le produit de matrices orthogonales est la matrice représentant la composée des isométries correspondantes. L'application déterminant est un morphisme de groupes de \mathcal{O} dans $\{-1, 1\}$. Son noyau \mathcal{O}^+ est le groupe des rotations. C'est un groupe commutatif isomorphe à (S_1, \times) : la multiplication par un complexe de module 1 est une rotation et réciproquement. Ainsi si $\theta \in \mathbf{R}$ alors il existe une rotation R_θ représentée par le complexe $\exp(i\theta)$. Le nombre θ associé à une rotation est unique modulo 2π . Si u_1 et u_2 appartiennent à S_1 il existe une et une seule rotation qui envoie u_1 sur u_2 .

On définit sur $S_1 \times S_1$ la relation \mathcal{R}^+ suivante. Si (u_1, u_2) et (v_1, v_2) appartiennent à $S_1 \times S_1$ alors $(u_1, u_2)\mathcal{R}^+(v_1, v_2)$ si et seulement s'il existe une rotation g telle que $g(u_i) = v_i, i = 1, 2$. On remarque que si g existe elle est unique. Puisque \mathcal{O}^+ est un groupe la relation \mathcal{R}^+ est une relation d'équivalence. On a $(u_1, u_2)\mathcal{R}^+(v_1, v_2)$ si et seulement s'il existe une rotation h telle que $h(u_1) = v_1$ et $h(u_2) = v_2$ c'est à dire si et seulement si $(u_1, v_1)\mathcal{R}^+(u_2, v_2)$. Cette relation d'équivalence s'étend à une relation d'équivalence de $(\mathbf{R}^2 \setminus \{0\})^2$ encore notée \mathcal{R}^+ en posant $(u_1, u_2)\mathcal{R}^+(v_1, v_2)$ si et seulement s'il existe une rotation g telle que $\|v_i\|g(u_i) = \|u_i\|v_i, i = 1, 2$. On appelle angle orienté de vecteurs une classe d'équivalence.

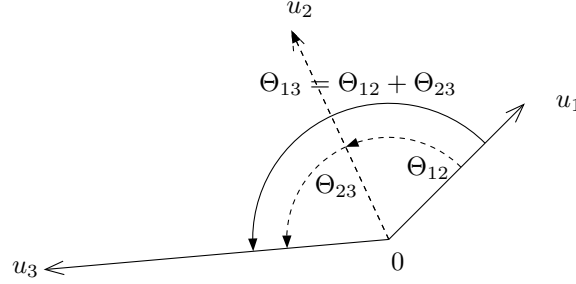


On a :

- $(u_1, u_2)\mathcal{R}^+(g(u_1), g(u_2))$ pour tout $g \in \mathcal{O}^+$.
- $(u_1, u_2)\mathcal{R}^+(u_1, u_1)$ si et seulement si u_1 et u_2 sont sur la même demi-droite ;
- à tout angle orienté Θ de vecteurs est associé un unique représentant de la forme $((1, 0), u_2)$ avec $u_2 \in S_1$ et une unique rotation $h_\Theta \in \mathcal{O}^+$, la rotation h_Θ telle que $h_\Theta(1, 0) = u_2$;
- si $u_1, u_2, v_1 \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ il existe un unique $v_2 \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ de norme 1 tel que $(u_1, u_2)\mathcal{R}^+(v_1, v_2)$;
- $(u_1, u_2)\mathcal{R}^+(v_1, v_2)$ et si $(u_2, u_3)\mathcal{R}^+(v_2, v_3)$ alors $(u_1, u_3)\mathcal{R}^+(v_1, v_3)$ et si on note Θ_{12}, Θ_{23} et Θ_{13} les angles représentés par $(u_1, u_2), (u_2, u_3)$ et (u_1, u_3) et $h_{\Theta_{12}}, h_{\Theta_{23}}$ et $h_{\Theta_{13}}$ les rotations associées aux trois angles alors

$$h_{\Theta_{13}} = h_{\Theta_{12}} \circ h_{\Theta_{23}}.$$

On peut donc munir l'espace des angles de vecteurs orientés d'une structure de groupe commutatif isomorphe à \mathcal{O}^+ en posant $\Theta_1 + \Theta_2 = \Theta_3$ si $h_{\Theta_1} \circ h_{\Theta_2} = h_{\Theta_3}$. Avec cette définition, l'angle Θ_{12} représenté par (u_1, u_2) additionné à l'angle Θ_{23} représenté par (u_2, u_3) est égal à l'angle Θ_{13} représenté par (u_1, u_3) (relation de Chasles).



On appelle mesure de l'angle Θ tout réel θ tel que les rotations h_Θ et R_θ coïncident. Si deux angles ont même mesure ils sont égaux. Le nombre θ est unique modulo 2π . Si θ_i est une mesure de $\Theta_i, i = 1, 2$ alors $\theta_1 + \theta_2$ est une mesure de $\Theta_1 + \Theta_2$.

Il faut observer que la notion d'angle orienté est indépendante de l'orientation du plan. En revanche le signe de la mesure de l'angle est directement liée à l'identification de $(1, 0) \in \mathbf{R}^2$ avec $1 \in \mathbf{C}$ et de $(0, 1) \in \mathbf{R}^2$ avec $i \in \mathbf{C}$ donc avec l'orientation de \mathbf{C} et par conséquent à une orientation du plan \mathbf{R}^2 .

La notion d'angle orienté s'étend aux demi-droites. Si δ_1 et δ_2 sont deux demi-droites alors $(u_1, u_2)\mathcal{R}^+(v_1, v_2)$ quelque soient $u_i, v_i \in \delta_i, i = 1, 2$. L'angle orienté $\Theta_{(\delta_1, \delta_2)}$ associé à (δ_1, δ_2) est l'angle orienté associé à (u_1, u_2) avec $u_i \in \delta_i, i = 1, 2$ quelconques. Si $g \in \mathcal{O}^+(\delta_1, \delta_2)$ et $(g(\delta_1), g(\delta_2))$ définissent le même angle orienté de droites. La relation de Chasles reste vraie :

$$\Theta_{(\delta_1, \delta_2)} + \Theta_{(\delta_2, \delta_3)} = \Theta_{(\delta_1, \delta_3)} \quad \text{si } \delta_1, \delta_2, \delta_3 \text{ sont trois demi-droites.}$$

Soit Θ un angle orienté de demi-droites. Si δ_1 et δ_2 sont deux demi-droites telles que $\Theta = \Theta_{(\delta_1, \delta_2)}$ on appelle mesure de l'angle $\Theta_{(\delta_1, \delta_2)}$ une mesure θ de l'angle orienté associé à (u_1, u_2) avec $u_i \in \delta_i, i = 1, 2$ quelconques. Le nombre θ est unique modulo 2π et ne dépend pas du choix des δ_i et des u_i . Si deux angles de demi-droites ont même mesure ils sont égaux. Si θ_i est une mesure de $\Theta_i, i = 1, 2$ alors $\theta_1 + \theta_2$ est une mesure de $\Theta_1 + \Theta_2$.

L'angle orienté de demi-droites peut aussi être défini par la relation d'équivalence suivante : si (δ_1, δ_2) et (δ'_1, δ'_2) sont des couples de demi-droites alors $(\delta_1, \delta_2)\tilde{\mathcal{R}}^+(\delta'_1, \delta'_2)$ si et seulement s'il existe une rotation g telle que $g(\delta_i) = \delta'_i, i = 1, 2$.

L'angle orienté de droites est défini par la relation d'équivalence suivante : si (δ_1, δ_2) et (δ'_1, δ'_2) sont des couples de droites alors $(\delta_1, \delta_2)\hat{\mathcal{R}}^+(\delta'_1, \delta'_2)$ si et seulement s'il existe une rotation g telle que $g(\delta_i) = \delta'_i, i = 1, 2$. Les classes d'équivalence pour cette relation s'appellent angles orientés de droites. On remarque que $(\delta_1, \delta_2)\hat{\mathcal{R}}^+(\delta'_1, \delta'_2)$ si et seulement s'il existe une rotation h telle que $h(\delta_1) = \delta_2$ et $h(\delta'_1) = \delta'_2$. Or une rotation fixe globalement une droite vectorielle donnée si et seulement si c'est l'identité ou Id ou $-Id$. L'ensemble des angles orientés de droites apparaît donc comme le quotient du groupe des isométries par le sous-groupe $\{Id, -Id\}$. Les angles orientés de droites vérifient encore la relation de Chasles :

$$\Theta_{(\delta_1, \delta_2)} + \Theta_{(\delta_2, \delta_3)} = \Theta_{(\delta_1, \delta_3)} \quad \text{si } \delta_1, \delta_2, \delta_3 \text{ sont trois droites.}$$

Soit Θ un angle orienté de droites. Si δ_1 et δ_2 sont deux droites telles que (δ_1, δ_2) représente Θ on appelle mesure de l'angle $\Theta = \Theta_{(\delta_1, \delta_2)}$ un nombre θ tel que la rotation R_θ envoie δ_1

sur δ_2 . Le nombre θ est unique modulo π et il ne dépend pas du choix du représentant (δ_1, δ_2) . Si deux angles orientés de droites ont même mesure ils sont égaux. Si θ_i est une mesure de $\Theta_i, i = 1, 2$ alors $\theta_1 + \theta_2$ est une mesure de $\Theta_1 + \Theta_2$.

Les notions d'angles orientés sont invariantes sous l'action de \mathcal{O}^+ (et plus généralement sous l'action des similitudes directes). Elles ne s'étendent pas aux couples de vecteurs, de demi-droites ou de droites de \mathbf{R}^n avec $n \geq 3$ car dans ce cas il n'y a pas unicité de l'isométrie directe qui envoie un couple de vecteurs, de demi-droites ou de droites sur un second couple.

Angles géométriques

L'angle géométrique de demi-droites vectorielles du plan euclidien est défini par la relation d'équivalence suivante : si $\{\delta_1, \delta_2\}$ et $\{\delta'_1, \delta'_2\}$ sont des couples de demi-droites alors $(\delta_1, \delta_2) \tilde{\mathcal{R}} (\delta'_1, \delta'_2)$ si et seulement si il existe une rotation g telle que $g(\{\delta_1, \delta_2\}) = \{\delta'_1, \delta'_2\}$. Les classes d'équivalence s'appellent angles géométriques de demi-droites. Les paires $\{\delta_1, \delta_2\}$ et $\{\delta'_1, \delta'_2\}$ définissent le même angle géométrique si et seulement si il existe une rotation h telle que $h(\delta_1) = \delta_2$ et $\delta'_2 \in \{h(\delta'_1), h^{-1}(\delta'_1)\}$ ou encore si et seulement si les angles orientés de demi-droites $\Theta_{(\delta_1, \delta_2)}$ et $\Theta_{(\delta'_1, \delta'_2)}$ sont égaux ou opposés. On appelle mesure d'un angle géométrique de demi-droites la valeur absolue de l'unique mesure $\theta \in]-\pi, \pi]$ de l'angle orienté de demi-droites $\Theta_{(\delta_1, \delta_2)}$ avec (δ_1, δ_2) représentant l'angle géométrique de demi-droites. La relation de Chasles ne marche plus.

Soient δ_1 et δ_2 deux demi-droites distinctes d'un plan vectoriel euclidien. Si \vec{u}_1 et \vec{u}_2 sont des vecteurs directeurs de δ_1 et δ_2 et θ est la mesure de l'angle géométrique fait par δ_1 et δ_2 alors

$$\cos(\theta) = \frac{(\vec{u}_1 | \vec{u}_2)}{\|\vec{u}_1\| \cdot \|\vec{u}_2\|}$$

et θ (et donc l'angle géométrique correspondant) est parfaitement déterminé par la connaissance de son cosinus.

La mesure de l'angle géométrique défini par de deux demi-droites δ_1 et δ_2 non colinéaires est la longueur de l'arc de cercle $C_{\delta_1, \delta_2} \cap S_1$ où C est l'enveloppe convexe de δ_1 et δ_2 (le petit secteur angulaire délimité par δ_1 et δ_2).

L'angle géométrique de droites est défini par la relation d'équivalence suivante : si $\{\delta_1, \delta_2\}$ et $\{\delta'_1, \delta'_2\}$ sont des couples de droites alors $(\delta_1, \delta_2) \hat{\mathcal{R}} (\delta'_1, \delta'_2)$ si et seulement si il existe une rotation g telle que $g(\{\delta_1, \delta_2\}) = \{\delta'_1, \delta'_2\}$. Les classes d'équivalence s'appellent angles géométriques de droites. Les paires $\{\delta_1, \delta_2\}$ et $\{\delta'_1, \delta'_2\}$ définissent le même angle géométrique si et seulement si il existe une rotation h telle que $h(\delta_1) = \delta_2$ et $\delta'_2 \in \{h(\delta'_1), h^{-1}(\delta'_1)\}$ ou encore si et seulement si les angles orientés de droites $\Theta_{(\delta_1, \delta_2)}$ et $\Theta_{(\delta'_1, \delta'_2)}$ sont égaux ou opposés. On appelle mesure d'un angle géométrique de droites la valeur absolue de l'unique mesure $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ de l'angle orienté de droites $\Theta_{(\delta_1, \delta_2)}$ avec (δ_1, δ_2) représentant l'angle géométrique de droites. La relation de Chasles ne marche plus.

Soient δ_1 et δ_2 deux droites distinctes d'un plan vectoriel euclidien. Si \vec{u}_1 et \vec{u}_2 sont des vecteurs directeurs de δ_1 et δ_2 et θ est la mesure de l'angle géométrique fait par δ_1 et δ_2 alors

$$\cos(\theta) = \frac{|(\vec{u}_1 | \vec{u}_2)|}{\|\vec{u}_1\| \cdot \|\vec{u}_2\|}$$

et θ (et donc l'angle géométrique correspondant) est parfaitement déterminé par la connaissance de son cosinus.

La mesure de l'angle géométrique défini par de deux droites δ_1 et δ_2 est la plus petite des longueurs des arcs de cercle $C_{\delta_1^+, \delta_2^+} \cap S_1$ où δ^+1 et δ^+2 décrivent les demi-droites associées à δ_1 et δ_2 et C est l'enveloppe convexe de δ_1^+ et δ_2^+ .

Les notions d'angles géométriques sont invariantes sous l'action de \mathcal{O} tout entier (et plus généralement sous l'action des similitudes). La caractérisation par le cosinus permet une extension aux couples de vecteurs, de demi-droites ou de droites de \mathbf{R}^n avec $n \geq 3$ mais dans la relation de Chasles ne marche plus. Ainsi si \vec{u}_1 et \vec{u}_2 sont deux vecteurs non nuls d'un espace vectoriel euclidien alors le cosinus de l'angle géométrique fait par les demi-droites dirigées respectivement par \vec{u}_1 et \vec{u}_2 est

$$\frac{(\vec{u}_1 | \vec{u}_2)}{\|\vec{u}_1\| \cdot \|\vec{u}_2\|}$$

et le cosinus de l'angle géométrique fait par les droites dirigées respectivement par \vec{u}_1 et \vec{u}_2 est

$$\frac{|(\vec{u}_1 | \vec{u}_2)|}{\|\vec{u}_1\| \cdot \|\vec{u}_2\|}.$$

Comme en dimension 2, les notions d'angles géométriques sont invariantes sous l'action de $O_n(\mathbf{R})$ tout entier (et plus généralement sous l'action des similitudes).

On montre par quatre méthodes différentes que la somme des trois angles géométriques d'un triangle est 180 degrés. Une fois on utilise des arguments de convexité, des coordonnées barycentriques et la conservation des angles géométriques sous l'action des isométries. Une autre fois on fait un calcul à l'aide de trois bases qui définissent la même orientation. La troisième preuve, plus savante, utilisera des arguments topologiques. La dernière utilise les nombres complexes et repose sur une identité utile pour prouver le théorème de l'angle au centre et les propriétés de cocyclicité.

On confond le plan affine euclidien et \mathbf{C} .

Si u_1 et u_2 sont deux complexes de modules 1 alors il existe un unique $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que $u_2 = \exp(i\theta)u_1$. Le nombre $|\theta|$ s'appelle angle géométrique fait par les demi-droites $\delta_i =]0, +\infty)u_i$. C'est aussi la longueur d'arc de cercle unité qui visite l'enveloppe convexe de ces demi-droites. Cet arc de cercle est paramétré par $t \in [0, 1] \mapsto \exp(it\theta)u_1$.

Si A, B, C sont trois points avec $A \neq B, C$ et d'affixes a, b, c on appelle angle géométrique \widehat{BAC} l'angle géométrique des demi-droites δ_1 et δ_2 auxquelles appartiennent les complexes $b - a$ et $c - a$.

Soient A et B_1, \dots, B_{n+1} différents de A . Si $\sum_{i=1}^n \widehat{B_i A B_{i+1}} \leq \pi$ et si les intérieurs des triangles pleins (B_i, A, B_{i+1}) sont deux à deux disjoints alors on a

$$\widehat{B_1 A B_{n+1}} = \sum_{i=1}^n \widehat{B_i A B_{i+1}}.$$

L'application qui a un angle géométrique associe son cosinus est une bijection. De plus

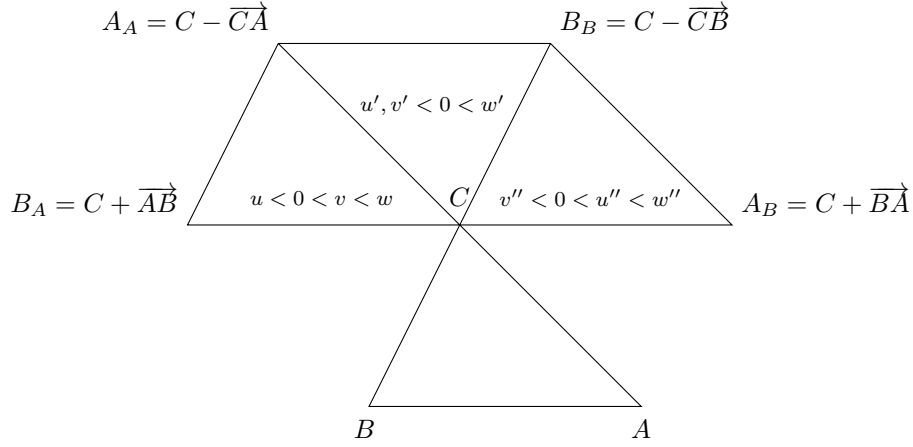
$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{\|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}\|}.$$

Si \mathcal{I} est une isométrie affine plus généralement une similitude alors

$$\mathcal{I}(B)\widehat{\mathcal{I}(A)\mathcal{I}(C)} = \widehat{BAC}.$$

9.1. Soit (A, B, C) un triangle non dégénéré. On pose $A_B = C + \overrightarrow{BA}$, $B_B = C - \overrightarrow{CB}$, $A_A = C - \overrightarrow{CA}$ et $B_A = C + \overrightarrow{AB}$. Les coordonnées barycentriques des points A, B, C, A_B, B_B, A_A et B_A dans le repère affine (A, B, C) sont :

$$\begin{aligned} A &: (1, 0, 0) \\ B &: (0, 1, 0) \\ C &: (0, 0, 1) \\ A_B &: (1, -1, 1) \\ B_B &: (0, -1, 2) \\ A_A &: (-1, 0, 2) \\ B_A &: (-1, 1, 1). \end{aligned}$$



Dans le repère affine (A, B, C) :

- les coordonnées barycentriques (u, v, w) des points à l'intérieur du triangle plein (C, B_A, A_A) vérifient $u < 0 < v$;
- les coordonnées barycentriques (u', v', w') des points à l'intérieur du triangle plein (C, A_A, B_B) vérifient $u', v' < 0$;
- les coordonnées barycentriques (u'', v'', w'') des points à l'intérieur du triangle plein (C, B_B, A_B) vérifient $v'' < 0 < u''$.

Par conséquent les intérieurs des triangles pleins (C, B_A, A_A) , (C, A_A, B_B) et (C, B_B, A_B) sont deux à deux disjoints. Or C, B_A et A_B sont alignés et les points A_A et B_B sont dans le même demi-espace défini par la droite $(A_B B_A)$. Par conséquent on a

$$\pi = \widehat{B_A C A_B} = \widehat{B_A C A_A} + \widehat{A_A C B_B} + \widehat{B_B C A_B}.$$

Or on passe du triangle (A, B, C) aux triangles (C, B_A, A_A) , (C, B_B, A_B) et (C, A_A, B_B) par trois isométries (translations de vecteurs \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{BC} et

symétrie par rapport à C) qui envoient respectivement A , B et B sur C . Par conséquent

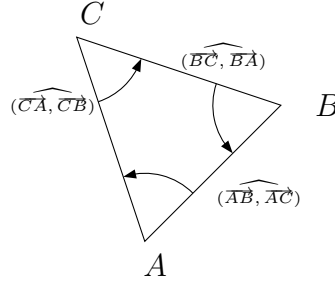
$$\begin{aligned}\widehat{B_A C A_A} &= \widehat{BAC} \\ \widehat{B_B C A_B} &= \widehat{CBA} \\ \widehat{A_A C B_B} &= \widehat{ACB}.\end{aligned}$$

Ainsi en sommant on obtient que la somme des angles géométriques d'un triangle vaut π (ou 180).

9.2. Soit (A, B, C) un triangle non dégénéré d'un plan euclidien. On oriente le plan de telle sorte que l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ soit compris strictement entre 0 et π . On considère les trois bases suivantes du plan vectoriel : $\mathcal{B}_A = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $\mathcal{B}_B = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et $\mathcal{B}_C = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$. On note M_{AB} , M_{BC} et M_{CB} les matrices qui expriment les coordonnées des vecteurs de bases \mathcal{B}_A , \mathcal{B}_B et \mathcal{B}_C dans les bases \mathcal{B}_B , \mathcal{B}_C et \mathcal{B}_A . Les trois matrices sont égales :

$$M_{AB} = M_{BC} = M_{CB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant est 1.



Par conséquent les angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ sont tous dans l'intervalle $]0, \pi[$. Ils se confondent avec les angles géométriques. De plus $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}) = 0$, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AB})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AC}) = \pi$. On déduit alors de la relation de Chasles pour les angles orientés que si on note Θ la somme des trois angles géométriques d'un triangle alors

$$\begin{aligned}\Theta &= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \\ &= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) \\ &= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AC}) \\ &= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AC}) \\ &= \pi.\end{aligned}$$

Ainsi la somme des angles géométriques d'un triangle vaut π (ou 180).

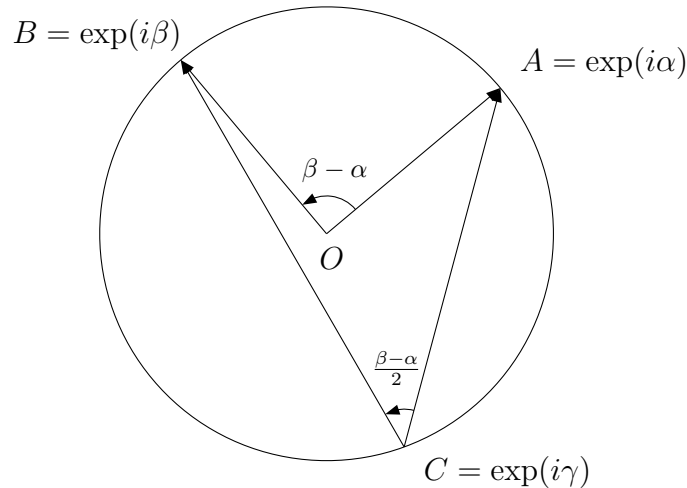
9.3. Soit (A, B, C) un triangle non dégénéré. Quitte à faire une homothétie on peut supposer que les affixes a, b et c des trois points sont $a = 1$, $b = \exp(i\beta)$ et $c = \exp(i\gamma)$ avec $0 < \beta < \gamma$. Si $t \in [0, 1]$ on pose $a(t) = a$, $b(t) = \exp(i(t\frac{2\pi}{3} + (1-t)\beta))$ et $c(t) = \exp(i(t\frac{4\pi}{3} + (1-t)\gamma))$. On a

$$0 < t\frac{2\pi}{3} + (1-t)\beta < t\frac{4\pi}{3} + (1-t)\gamma < 2\pi$$

pour tout $t \in [0, 1]$. Par conséquent les triangles correspondants (A_t, B_t, C_t) ne sont jamais dégénérés. Les angles orientés $(\widehat{A_t B_t}, \widehat{A_t C_t})$, $(\widehat{B_t C_t}, \widehat{B_t A_t})$ et $(\widehat{C_t A_t}, \widehat{C_t B_t})$ dépendent continument de t . Ils ne peuvent donc pas changer de signe. Or pour $t = 1$ on tombe sur le triangle équilatéral $(1, j, j^2)$ et un calcul rapide montre qu'alors les trois angles valent $\frac{2\pi}{3}$. Par conséquent ils sont toujours strictement positifs. Ainsi ils coïncident avec les angles géométriques du triangle (A_t, B_t, C_t) . Comme dans 9.2 on déduit de la relation de Chasles que leur somme vaut π . Ceci prouve par une troisième méthode que la somme des angles géométriques d'un triangle vaut π (ou 180).

Ici on a admis la variation continue (ou au moins différentiable) de l'angle. Plus précisément si $t \in I \mapsto f(t) = x(t) + iy(t) \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ est C^1 alors il existe $t \in I \mapsto r(t) \in]0, +\infty)$ C^1 et $t \in I \mapsto \theta(t) \in \mathbf{R}$ C^1 telles que $f(t) = r(t) \exp(i\theta(t))$. Il suffit de prendre $r(t) = |f(t)|$ et pour $\theta(t)$ la primitive de la fonction $t \in I \mapsto g(t) = \frac{x(t)y'(t) - y(t)x'(t)}{r^2(t)}$ avec $\theta(t_0) = \theta_0$ où $t_0 \in I$ est choisi arbitraire et θ_0 est une détermination de l'argument de $f(t_0)$.

9.4. Soit (A, B, C) un triangle non dégénéré. Par une homothétie et en confondant les points et leurs affixes on a $A = \exp(i\alpha)$, $B = \exp(i\beta)$ et $M = \exp(i\mu)$ avec α, β et μ différents (modulo 2π).



L'angle orienté $(\widehat{0A}, \widehat{0B})$ est l'argument de $\frac{\exp(i\beta)}{\exp(i\alpha)} = \exp(i(\beta - \alpha))$. Il est égal à $\beta - \alpha$. L'angle orienté $(\widehat{CA}, \widehat{CB})$ est l'argument de $\frac{\exp(i\mu) - \exp(i\beta)}{\exp(i\mu) - \exp(i\alpha)}$. Il se

calcule de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 \frac{\exp(i\mu) - \exp(i\beta)}{\exp(i\mu) - \exp(i\alpha)} &= \frac{\exp(i\frac{\mu-\beta}{2}) - \exp(-i\frac{\mu-\beta}{2})}{\exp(i\frac{\mu-\alpha}{2}) - \exp(-i\frac{\mu-\alpha}{2})} \frac{\exp(i\frac{\mu+\beta}{2})}{\exp(i\frac{\mu+\alpha}{2})} \\
 &= \frac{\frac{\exp(i\frac{\mu-\beta}{2}) - \exp(-i\frac{\mu-\beta}{2})}{2i}}{\frac{\exp(i\frac{\mu-\alpha}{2}) - \exp(-i\frac{\mu-\alpha}{2})}{2i}} \exp(i\frac{\beta-\alpha}{2}) \\
 &= \frac{\sin(\frac{\mu-\beta}{2})}{\sin(\frac{\mu-\alpha}{2})} \exp\left(i\frac{\beta-\alpha}{2}\right).
 \end{aligned}$$

Si on a choisit $\alpha < \beta < \gamma < \alpha + 2\pi$ alors $\sin(\frac{\mu-\beta}{2}), \sin(\frac{\mu-\alpha}{2}) > 0$. Par conséquent la formule implique que

$$\left| \frac{\exp(i\mu) - \exp(i\beta)}{\exp(i\mu) - \exp(i\alpha)} \right| = \frac{\sin(\frac{\mu-\beta}{2})}{\sin(\frac{\mu-\alpha}{2})}$$

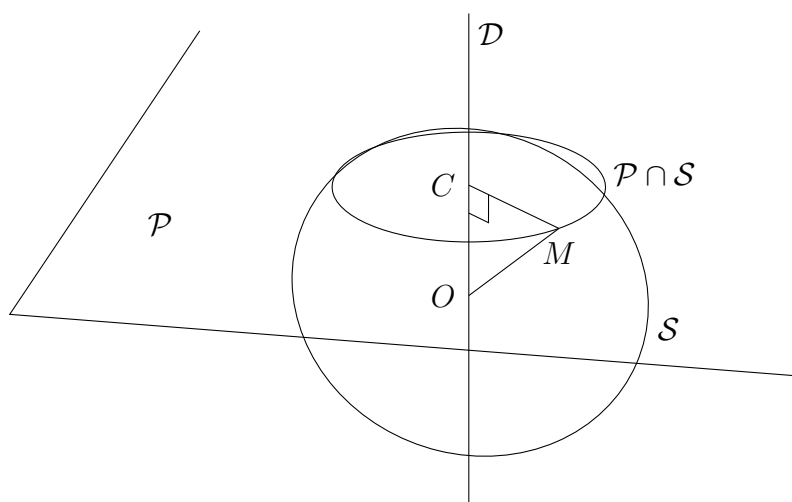
et l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$ est égal à $\frac{\beta-\alpha}{2}$. Ainsi le double de $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$ est égal à l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{0A}, \overrightarrow{0B}})$. On reconnaît le théorème de l'angle au centre.

Quitte à permuter A, B et C on peut supposer que $\alpha < \beta < \gamma < \alpha + 2\pi$. Les angles géométriques $\widehat{ACB}, \widehat{BAC}$ et \widehat{CBA} sont donc égaux respectivement à $\frac{\beta-\alpha}{2}, \frac{\gamma-\beta}{2}$ et $\frac{\alpha+2\pi-\gamma}{2}$. Leur somme vaut π . Ceci prouve encore une fois que la somme des angles géométriques d'un triangle vaut π (ou 180).

10. Montrer avec des arguments connus en 3ème que l'intersection d'une sphère et d'un plan est soit le vide, soit un point, soit un cercle (voir le document d'accompagnement du programme de 1998 - CNDP).

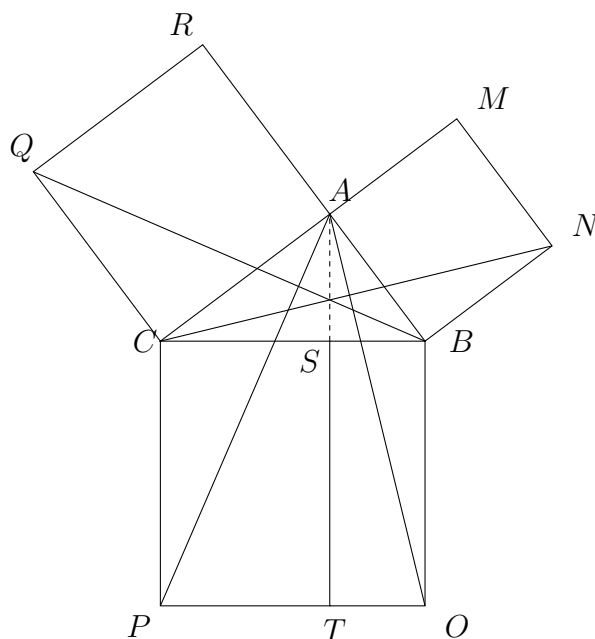
Outre le théoème de Pythagore, on utilisera les résultats suivants. Par tout point de l'espace passe une et une seule perpendiculaire à un plan donné. Elle coupe ce plan en un unique point. Une perpendiculaire à un plan de l'espace en un point est perpendiculaire à toutes les droites du plan qui passe par ce point. Une demi-droite qui passe par le centre d'un cercle donné coupe en un point exactement ce cercle et tout point du cercle est sur une telle demi-droite.

Soit \mathcal{S} une sphère de centre O et de rayon $r > 0$ et soit \mathcal{P} un plan de l'espace. On note \mathcal{D} la perpendiculaire à \mathcal{P} qui passe par O et on note C le point d'intersection de \mathcal{P} et \mathcal{D} . Soit $M \in \mathcal{P}$ et différent de C . Puisque les droites \mathcal{D} et (CM) sont orthogonales on a $OM = \sqrt{OC^2 + CM^2} > OC$. Ainsi si $OC > r$ alors $\mathcal{P} \cap \mathcal{S}$ est vide et si $OC = r$ alors $\mathcal{P} \cap \mathcal{S}$ est réduit au point C . Considérons maintenant le cas où $0 \leq OC < r$. Si $M \in \mathcal{P} \cap \mathcal{S}$ alors $OM = \sqrt{OC^2 + CM^2} = r$ et donc $CM = \sqrt{r^2 - OC^2}$. Ceci implique que M est sur le cercle du plan \mathcal{P} , centré en C et de rayon $\sqrt{r^2 - OC^2}$. Réciproquement si M est sur ce cercle alors $OM = \sqrt{OC^2 + CM^2} = r$ et donc M appartient à $\mathcal{P} \cap \mathcal{S}$. Ceci prouve que $\mathcal{P} \cap \mathcal{S}$ est le cercle du plan \mathcal{P} , centré en C et de rayon $\sqrt{r^2 - OC^2}$.



11. La preuve d'Euclide du théorème de Pythagore, à partir de la figure du Moulin à vent.

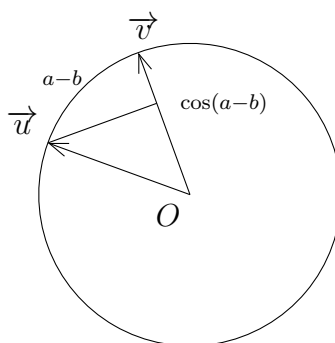
Soit (A, B, C) un triangle rectangle en A . Appuyons sur chaque côté de ce triangle un carré extérieur. Ainsi, sur le côté (A, B) s'appuie le carré (A, M, N, B) , sur l'hypothénuse (B, C) s'appuie le carré (B, O, P, C) et sur le côté (C, A) s'appuie le carré (C, Q, R, A) . On note S et T les projetés orthogonaux de A sur les droites (BC) et (OP) . Une rotation envoie le triangle (N, B, C) sur le triangle (A, B, P) . Ces deux triangles ont donc la même aire. En considérant le triangle (N, B, C) on constate que cette aire est la moitié de l'aire du carré (A, M, N, B) alors qu'en considérant le triangle (A, B, P) on obtient que cette aire est la moitié de celle du rectangle (B, OT, S) . Ainsi l'aire du carré (A, M, N, B) est égale à celle du rectangle (B, OT, S) . Les mêmes arguments montrent que l'aire du carré (C, Q, R, A) est égale à celle du rectangle (S, T, P, C) . Or l'aire du carré (B, O, P, C) est la somme des aires des rectangles (B, OT, S) et (S, T, P, C) . Ceci prouve que l'aire du carré (B, O, P, C) est égale à la somme des aires des carrés (A, M, N, B) et (C, Q, R, A) . Ainsi dans un triangle rectangle le carré de l'hypothénuse est la somme des carrés des deux autres côtés.



Signalons qu'on a utilisé les angles aux sommets B et C sont aigus strictement car le triangle (A, B, C) est rectangle en A . Ceci implique que la hauteur issue de A coupe la droite (BC) au point S qui est à l'intérieur du segment $]B, C[$. C'est pourquoi l'aire du carré (B, O, P, C) est la somme des aires des rectangles (B, OT, S) et (S, T, P, C) .

12. La formule $\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$ et le produit scalaire : survol des programmes de Géométrie de la première S à la quatrième.

En sixième on sait mesurer un angle à l'aide d'un rapporteur, on sait le reporter à l'aide d'un gabari ou d'un rapporteur. En cinquième on apprend que la somme des angles d'un triangle vaut 180 degrés. En quatrième on découvre Pythagore et le cosinus d'un angle aigu. Le sinus de l'angle aigu est introduit en troisième. Dans cette classe, on s'intéresse aussi aux rotations du plan, à la comparaison angle inscrit, angle au centre pour des triplets sur un cercle. Les triangles isométriques (directs et indirects) ainsi que les triangles semblables sont étudiés en seconde. Le calcul vectoriel est peu développé dans cette classe mais la notion de coordonnées du plan, aperçue en troisième, est approfondie en seconde. Les notions d'angle orienté et de produit scalaire sont au programme de première S.



L'angle orienté $(\widehat{\vec{v}}, \widehat{\vec{u}})$ formé par les vecteurs unitaires $\vec{v} = (\cos(b), \sin(b))$ et $\vec{u} = (\cos(a), \sin(a))$ a pour mesure $a - b$. Or le cosinus d'un angle orienté de vecteurs unitaires est le produit scalaire de ces vecteurs. Ainsi

$$\cos(a - b) = \vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b).$$

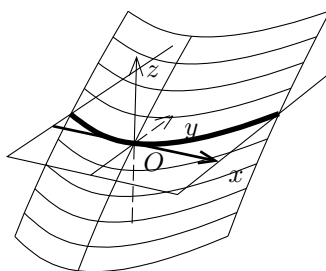
13. Quelques rappels de géométrie différentielle dans \mathbf{R}^2 sont faits : inversion locale, fonctions implicites, paramétrisation par l'abscisse curviligne, variation continue de la mesure d'un angle qui dépend de façon C^1 d'un paramètre.

Inversion locale Soit $F : U \rightarrow \mathbf{R}^2$ une fonction de classe $C^k, k \geq 1$ définie sur un ouvert U de \mathbf{R}^2 et soit $a \in U$. On suppose que le rang de la différentielle $dF(a)$ de F en a est 2 ($dF(a)$ est une application linéaire inversible). Alors il existe un ouvert U_a inclus dans U et qui contient a tel que :

- la restriction $F|_{U_a}$ de F à U_a est une bijection sur $F(U_a)$;
- $F(U_a)$ est un ouvert et la réciproque $F|_{U_a}^{-1} : F(U_a) \rightarrow U_a$ est de classe C^k .

Fonction implicite Soit $f : U \rightarrow \mathbf{R}^1$ une fonction de classe $C^k, k \geq 1$ définie sur un ouvert U de \mathbf{R}^2 et soit $a = (x_a, y_a) \in U$. On suppose que $\frac{\partial f}{\partial y}(a) \neq 0$ et $f(a) = 0$. Alors il existe une fonction $\phi :]x_a - \delta, x_a + \delta[\rightarrow]y_a - \varepsilon, y_a + \varepsilon[$ de classe C^k telle que pour tout $(x, y) \in]x_a - \delta, x_a + \delta[\times]y_a - \varepsilon, y_a + \varepsilon[$ on a

$$f(x, y) = 0 \text{ si et seulement si } y = \phi(x).$$



le niveau $f(x, y) = 0$ est le graphe d'une fonction $x \mapsto \phi(x)$ car $\frac{\partial f}{\partial y}(0) \neq 0$

Paramétrisation par l'abscisse curviligne Soit I un intervalle ouvert de \mathbf{R} et $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ une application de classe C^1 . Si $t \in I$ on pose $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Un vecteur tangent à la courbe $\Gamma = \gamma(I)$ au point $\gamma(a)$ est le vecteur $\gamma'(a) = (x'(a), y'(a))$. Supposons que pour tout $t \in I$ $\gamma'(t) \neq 0$. Si $]a, b[\subset I$ la longueur de l'arc de courbe $\gamma([a, b])$ est

$$\text{longueur}(\gamma([a, b])) = \left| \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt \right| = \left| \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \right|.$$

On a évidemment la relation de Chasles

$$\text{longueur}(\gamma([a, c])) = \text{longueur}(\gamma([a, b])) + \text{longueur}(\gamma([b, c])) \text{ si } a < b < c.$$

On remarque que si A est une isométrie affine alors les arcs de courbes $\gamma([a, b])$ et $A \circ \gamma([a, b])$ ont même longueur. Si H_r est une homothétie de rapport r alors la longueur de l'arc de courbe $H_r \circ \gamma([a, b])$ est r fois celle de l'arc de courbe $\gamma([a, b])$.

Si $g : J \rightarrow I$ est un difféomorphisme C^1 alors les arcs de courbes $\gamma \circ g([a, \beta])$ et $\gamma([g(a), g(\beta)])$ ont même longueur.

Il existe un intervalle ouvert J de \mathbf{R} tel que l'application $s_a : I \rightarrow J$ définie par

$$s_a(u) = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt \text{ si } u \in I$$

est un difféomorphisme C^1 et croissant. L'application $\gamma \circ s_a^{-1} : J \rightarrow \mathbf{R}^2$ s'appelle paramétrisation par l'abscisse curviligne de γ d'origine a .

Un calcul immédiat montre que si γ est une injection à valeurs dans une droite alors la longueur de $\gamma([a, b])$ est égale à $\overrightarrow{\gamma(a)\gamma(b)}$.

Un calcul montre que $x \in \mathbf{R} \mapsto \exp(ix)$ est une paramétrisation par l'abscisse curviligne du cercle unité $\{|z| = 1\}$. Ceci implique que le périmètre du cercle unité est 2π puisque la restriction à $[0, 2\pi[$ de $x \mapsto \exp(ix) \in \{|z| = 1\}$ est une bijection.

Variation continue de l'argument Soit $\gamma_i : I \rightarrow \mathbf{R}^2, i = 1, 2, 3$ trois applications de classe C^1 . On suppose que pour tout t les $\gamma_i(t)$ sont trois points distincts. On fixe une origine $a \in I$ et on note θ_a une mesure de l'angle orienté $\widehat{(\gamma_1(a)\gamma_2(a), \gamma_1(a)\gamma_3(a))}$. On identifie \mathbf{R}^2 et \mathbf{C} et si $t \in I$ on pose $z(t) = \frac{\gamma_3(a) - \gamma_1(a)}{\gamma_2(a) - \gamma_1(a)}$. Alors $|z(t)| = 1$ et un argument de $z(t)$ est une mesure de l'angle orienté $\widehat{(\gamma_1(t)\gamma_2(t), \gamma_1(t)\gamma_3(t))}$. On pose $z(t) = x(t) + iy(t)$. On définit une fonction θ de classe C^1 en posant

$$\theta(t) = \theta_a + \int_a^t (x(s)y'(s) - y(s)x'(s)) ds.$$

Si $t \in I$ on a $\theta'(t) = (x(s)y'(s) - y(s)x'(s))$. De plus $x'(t)x(t) + y'(t)y(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |z(t)|^2 = 0$ et donc les vecteurs $(x'(t), y'(t))$ et $(-y(t), x(t))$ sont colinéaires. Or On sait que si u est un vecteur unitaire et v un vecteur qui lui est colinéaire alors $v = \langle v, u \rangle u$ où $\langle v, u \rangle$ désigne le produit scalaire de v et u . Par conséquent, puisque $(-y(t), x(t))$ est unitaire (il correspond au nombre complexe $iz(t)$) on a

$$\begin{aligned} (x'(t), y'(t)) &= \langle (x'(t), y'(t)), (-y(t), x(t)) \rangle (-y(t), x(t)) \\ &= (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) = |z'(t)|. \end{aligned}$$

En passant à l'écriture complexe on obtient

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t) = (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))iz(t).$$

Ceci implique

$$\begin{aligned} \left[\frac{z(t)}{\exp(-i\theta(t))} \right]' &= [z(t) \exp(-i\theta(t))]' \\ &= [z'(t) - (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))iz(t)] \exp(-i\theta(t)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Or $\exp(i\theta(a)) = z(a)$. Par conséquent pour tout t dans I $\exp(i\theta(t)) = z(t)$ et $\theta(t)$ est une détermination C^1 de la mesure de l'angle orienté $\widehat{(\gamma_1(t)\gamma_2(t), \gamma_1(t)\gamma_3(t))}$.

14. Rappels sur les barycentres, les coordonnées barycentriques et la convexité.

14.1. Espaces vectoriels et affines, généralités sur les barycentres et les segments.

Dans tout ce qui suit le corps de base est $(\mathbf{R}, +, \times)$, c'est à dire l'ensemble des réels muni de l'addition et de la multiplication usuelles.

1. Espaces vectoriels et espaces affines, comparaison, exemple et illustration extra-mathématique

Un **espace vectoriel** est un triplet $(E, +_E, \cdot)$ formé d'un ensemble non vide E , d'une loi interne notée $+_E$ et d'une loi externe notée \cdot et qui vérifie les propriétés suivantes :

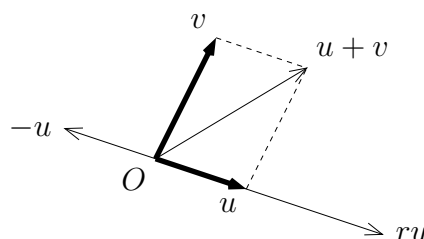
- 1 - $(E, +_E)$ est un groupe commutatif : si u, v et w appartiennent à E alors

- $u +_E v = v +_E u$,
- $u +_E (v +_E w) = (u +_E v) +_E w$,
- il existe un neutre pour $+_E$ noté $\mathbf{0}$ ($u +_E \mathbf{0} = \mathbf{0} +_E u = u$ si u dans E),
- tout u de E possède un opposé noté $(-u)$ ($u +_E (-u) = (-u) +_E u = \mathbf{0}$);
- 2 - si r, s appartiennent à \mathbf{R} et u appartient à E alors
 - $(r + s) \cdot u = r \cdot u +_E s \cdot u$,
 - $(r \times s) \cdot u = r \cdot (s \cdot u)$,
 - $0 \cdot u = \mathbf{0}$.

Exemple mathématique L'ensemble \mathbf{R}^n des n -uplets de réels $v = (v_1, \dots, v_n)$ muni des opérations suivantes est un espace vectoriel E :

- $(v_1, \dots, v_n) +_E (w_1, \dots, w_n) = (v_1 + w_1, \dots, v_n + w_n)$;
- $r \cdot (v_1, \dots, v_n) = (r \times v_1, \dots, r \times v_n)$;
- le neutre est $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$.

Les éléments d'un espace vectoriel sont appelés **vecteurs**.



Un sous-espace vectoriel E' d'un espace vectoriel E est un sous-ensemble non vide de E et stable par $+_E$ et par \cdot . L'intersection de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

Si $n = 1$ on observe que alors $+_E = +$, $\cdot = \times$ et $\mathbf{0} = 0$. Ainsi $(\mathbf{R}, +, \times)$ est un espace vectoriel. L'ensemble $\mathbf{R}^0 = \{0\}$ est l'**espace vectoriel nul**.

Dorénavant on ne distingue plus par des notations différentes les opérations " $+_E$ " et " $+$ " et les neutres $\mathbf{0}$ et 0 . Souvent on ne note pas l'opération " \cdot ". Mais les opérations existent bien et restent différentes. Le contexte doit permettre de comprendre de quelle opération on parle. Généralement on concède que le neutre est commun à tous les espaces vectoriels. Quand on dit d'un ensemble E qu'il est un espace vectoriel on sous-entend qu'on l'a muni de deux lois qui lui donnent une structure d'espace vectoriel. Les deux lois sont données naturellement par le contexte.

Si E et F sont deux espaces vectoriels, on appelle **application linéaire** de E dans F une application f de E dans F qui vérifie

$$f(ru + sv) = rf(u) + sf(v)$$

si r, s dans \mathbf{R} et u, v dans E . Si E' et F' sont des sous-espaces vectoriels de E et F alors $f(E')$ et $f^{-1}(F')$ sont des sous-espaces vectoriels de F et E . La composée d'applications linéaires est une application linéaire. L'inverse d'une application linéaire bijective est une application linéaire.

À tout réel r est associé une application linéaire h_r de E dans E appelée **homothétie de rapport** r et qui est à tout vecteur u associe le vecteur $h_r(u) = r \cdot u$. Si s est aussi un réel alors $h_r \circ h_s(u) = h_r(h_s(u)) = h_{rs}(u)$. Ainsi $h_r \circ h_s = h_{rs}$.

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel. Un **espace affine dirigé par** $(E, +, \cdot)$ (on dit aussi de **direction** $(E, +, \cdot)$) est un triplet $(A, (E, +, \cdot), T)$ où A est un ensemble non vide et T une application de $E \times A$ dans A qui vérifie les propriétés suivantes :

- si a appartient à A alors l'application de E dans A qui à u dans E associe $T(u, a)$ qui est noté $T_u(a)$ mais aussi $a + u$ (attention c'est une notation un peu abusive) est une bijection ;
- si a appartient à A et u, v à E alors on a $T(u, T(v, a)) = T(v + u, a)$ ce qui s'écrit avec l'abus de notation précédent $(a + v) + u = a + (v + u)$.

Souvent, quand il n'y a pas de confusion possible on dit A espace affine dirigé par E ou même tout simplement A espace affine mais il faut bien se rappeler que ce qu'on considère en réalité c'est $(A, (E, +, \cdot), T)$.

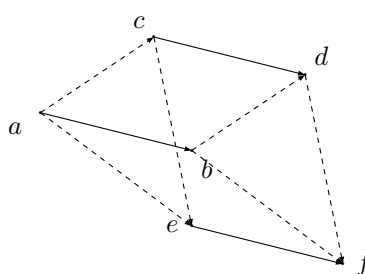
Remarquons que par définition si a et b sont dans A il existe un unique vecteur de E noté \overrightarrow{ab} tel que $b = T(\overrightarrow{ab}, a)$ ou encore (avec l'abus de notation) $b = a + \overrightarrow{ab}$. Ce qui est très important c'est qu'on a la **relation de Chasles** :

si a, b et c sont dans A alors

$$\vec{ab} + \vec{bc} = \vec{ac}.$$

En effet $b = T(\vec{ab}, a)$ et $c = T(\vec{bc}, b)$ et donc $c = T(\vec{bc}, T(\vec{ab}, a)) = T(\vec{ab} + \vec{bc}, a) = T(\vec{ac}, a)$ et donc $\vec{ab} + \vec{bc} = \vec{ac}$.

Les éléments d'un espace affine sont appelés **points**. Deux couples de points (a, b) et (c, d) sont dits **équipollents** si $\vec{ab} = \vec{cd}$. la relation d'équipollence est une relation d'équivalence. De plus (a, b) et (c, d) sont équipollents si (a, c) et (b, d) le sont.



(a, b) , (c, d) et (e, f) sont équipollents
 (a, c) et (b, d) sont équipollents
 (c, e) et (d, f) sont équipollents
 (a, e) et (b, f) sont équipollents

Un **sous-espace affine** A' d'un espace affine A de direction E est le vide ou un sous-ensemble non vide de A de la forme $A' = a + E' = \{T(u, a) : u \in E'\} = \{a + u : u \in E'\}$ où E' est un sous-espace vectoriel de E . Le sous-espace vectoriel E' est la **direction** de A' . Un point est un sous-espace affine. Une droite affine est un sous-espace affine de direction une droite vectorielle. L'intersection de sous-espaces affines est un sous-espace affine.

Soit A un espace affine dirigé par E . Si u appartient à E , l'application T_u de A dans A qui à tout point a de A associe le point $T_u(a) = T(u, a) = a + u$ s'appelle **translation** de vecteur u . Si v est un second vecteur la condition $T(u, T(v, a)) = T(v + u, a)$ s'écrit aussi $T_u(T_v(a)) = T_{v+u}(a)$ ce qui signifie que la composée $T_u \circ T_v$ est égale à la translation T_{v+u} de vecteur $v + u$.

Soit A et B sont deux espaces affines de directions respectives E et F . On note T et T' les applications de $E \times A$ et de $F \times B$ qui donnent les structures d'espaces affines. Une application g de A dans B est dite **affine** s'il existe une application linéaire f de E dans F telle que $g(T(u, a)) = T'(f(u), g(a))$ si a est un point de A et u un vecteur de E . Ceci s'écrit aussi $g(a+u) = g(a)+f(u)$. L'application f associée à g est unique et s'appelle **partie linéaire** associée. Une application affine est complètement déterminée par l'image d'un point a

arbitraire et par sa partie linéaire. La composée d'applications affines est une application affine dont la partie linéaire est la composée des parties linéaires. L'inverse d'une application affine bijective est une application affine dont la partie linéaire est l'inverse de la partie linéaire de l'application affine initiale. Si A' et B' sont des sous-espaces affines de A et B dirigés par E' et F' alors $g(A')$ et $g^{-1}(B')$ sont des sous-espaces affines de B et A dirigés par $f(E')$ et $f^{-1}(F')$.

Les translations sont des applications affines. Ce sont celles dont la partie linéaire est l'identité de E . On appelle homothétie affine une application affine de A dans A dont la partie linéaire est une homothétie. Une homothétie affine de rapport r différent de 1 et 0 est complètement déterminée par son rapport et son unique point fixe (parmi les homothéties affines). Si $r = 1$ c'est une translation. Si $r = 0$ c'est une application constante.

Exemple mathématique On a déjà muni \mathbf{R}^n de la casquette d'espace vectoriel E . On va le munir maintenant d'une structure d'espace affine A dirigé par \mathbf{R}^n vu comme espace vectoriel en définissant une application T de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ qui vérifie les conditions précédentes. Si $u = (u_1, \dots, u_n)$ appartient à \mathbf{R}^n (vu comme espace vectoriel) et $a = (a_1, \dots, a_n)$ à \mathbf{R}^n (vu comme espace affine) alors $T(u, a)$ est par définition égal à $(a_1 + u_1, \dots, a_n + u_n)$. Ceci revient à définir $T(u, a)$ comme la somme $a + u$ on où a est considéré un instant comme vecteur. À première vue, munir \mathbf{R}^n de deux statuts est source de confusions et de troubles. C'est en fait une source d'une richesse prodigieuse mais qui nécessite un peu de pratique.

Lorsqu'on considère \mathbf{R}^n comme un espace vectoriel il faut toujours avoir en tête qu'on s'intéresse au triplet $(\mathbf{R}^n, +, \cdot)$ et lorsqu'on considère \mathbf{R}^n comme espace affine on considère le triplet $(\mathbf{R}^n, (\mathbf{R}^n, +, \cdot), T)$.

L'ensemble des réels vu comme espace affine s'appelle **droite réelle affine** ou **droite réelle**. Une **droite affine** est l'image par une application affine injective de la droite réelle. Ce n'est pas une définition usuelle mais plutôt une caractérisation utile des droites affines.

Soit $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$ des éléments de \mathbf{R}^n (je ne dis pas avec quel statut je les regarde) et soit r un nombre réel. Alors l'élément $c = (c_1, \dots, c_n)$ de \mathbf{R}^n défini par $c_i = a_i + b_i$ si $i = 1, \dots, n$ peut être vu comme l'image $T(b, a)$ du point a par la translation T_b de vecteur b ou comme la somme des vecteurs a et b suivant les statuts donnés. Il ne peut jamais être vu comme la somme des points a et b car on ne somme pas des points d'un espace affine. De même l'élément $d = (d_1, \dots, d_n)$ défini par $d_i = ra_i$ si $i = 1, \dots, n$ peut être vu comme le vecteur $r \cdot a$ obtenu en multipliant le vecteur a par le scalaire r ou comme l'image $h_r(a)$ du vecteur a par l'homothétie h_r ou encore comme l'image du

point a par l'homothétie affine de rapport r qui fixe $0 = (0, \dots, 0)$.

L'exemple de \mathbf{R}^n est fondamental car l'étude d'un espace affine A de direction un espace vectoriel E de dimension n s'y ramène de la façon suivante.

- Observons que ce qui a été fait avec \mathbf{R}^n peut être fait avec l'espace vectoriel E . Il peut être vu comme espace affine de direction lui-même en posant $T(u, a) = a + u$ avec dans le premier terme de l'égalité u vu comme vecteur et a comme point et dans le second terme a et u vu comme vecteurs (ce qui autorise de faire la somme et de définir T).

- Fixons un point a de A et considérons l'application g de A dans E qui à b dans A associe le vecteur $g(b) = \overrightarrow{ab}$ de E . Si on considère E comme espace affine on observe que g est une bijection affine dont la partie linéaire est l'identité.

- Considérons une base $e = (e_1, \dots, e_n)$ de E . L'application X qui à u de E associe l'unique élément $x = (x_1, \dots, x_n)$ de \mathbf{R}^n tel que $u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ (c'est à dire les coordonnées de u dans la base e) est une application linéaire et bijective. Si on voit E et \mathbf{R}^n comme espace affine, c'est aussi une application affine bijective.

- La composée $X \circ g$ de X et de g est une bijection affine (composée de bijections affines) dont la partie linéaire est l'application linéaire bijective X . Ces applications permettent de réduire les propriétés affines de A à celles de \mathbf{R}^n .

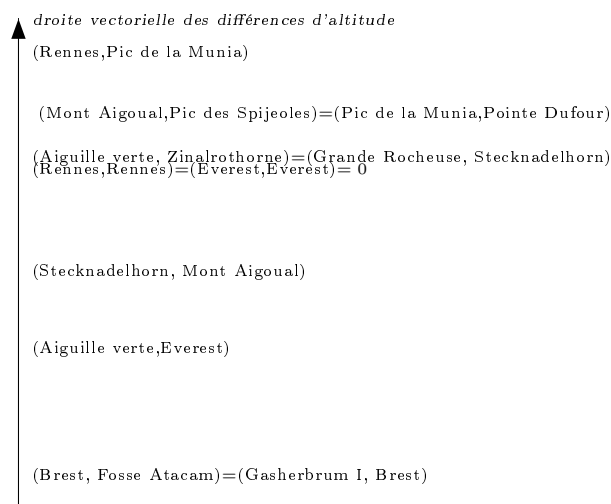
Illustrations extra-mathématiques Intéressons nous à l'**altitude**. Avant d'être transformée en nombre (en mètre, en kilomètre, en foot, en yard) c'est avant tout une grandeur affine. On ne s'amuse pas à additionner l'altitude du Mont-Blanc à celle de l'Himalaya ni à multiplier l'altitude du sommet de la Tour Eiffel ou du Viaduc de Millau par 3,14. En revanche on s'autorise le calcul des différences d'altitudes. Schématiquement, une altitude c'est l'ensemble des points situés à égale distance du centre de la terre. Lorsqu'on veut mesurer une altitude on choisit une unité de mesure, une origine (un niveau de référence) et un sens. Les altitudes des lieux géographiques sont mesurés à partir du niveau de la mer en comptant positivement pour les lieux émergés. Si on s'intéresse à l'altitude d'un tableau sur un mur du Musée Beaubourg, on va plutôt prendre comme origine le sol de la salle d'exposition que le niveau de la mer ou de la Seine. Pour la profondeur de la Piscine Brequigny en différents endroits (fosse des plongeurs ou vers la ligne de départ) on prend comme origine à la surface de l'eau et on la compte positivement. Fixons une origine, le niveau de la mer, une unité de mesure, le mètre et une orientation positive (un sens) en comptant positivement les altitudes émergées. L'application qui à une altitude associe sa mesure avec ces conventions est une application affine de la droite des altitudes dans la droite réelle \mathbf{R} . Un couple

(a, b) d'altitudes définit un vecteur $u = \overrightarrow{ab}$. Un autre couple (c, d) d'altitudes définit le même vecteur (i.e. $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{cd}$) si la différence d'altitude entre d et c est la même qu'entre b et a . Voici quelques altitudes associées à des villes, des sommets montagneux et à des fosses marines et données par wikipedia.



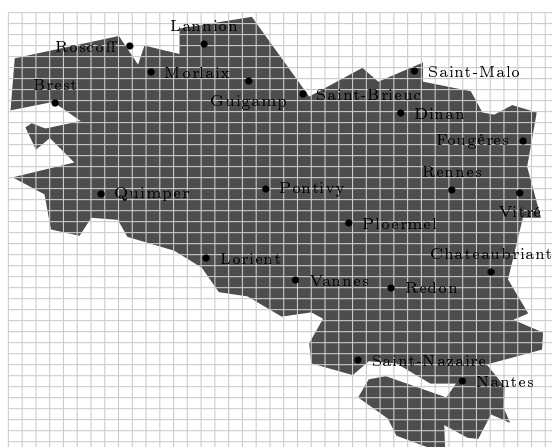
la droite affine des altitudes avec comme origine le niveau de la mer (Brest)

En comparant ces altitudes, j'ai observé que les couples (Aiguille verte, Grande Rocheuse) et (Zinalrothorne, Stecknadelhorn) définissent le même vecteur associé à la différence d'altitude $+20$ mètres. Par conséquent les couples (Aiguille verte, Zinalrothorne) et (Grande Rocheuse, Stecknadelhorn) définissent les mêmes vecteurs (ils sont associés à la différence d'altitude $+319$ mètres).



Les couples (Brest, Fosse Atacama) et (Gasherbrum I, Brest) définissent le même vecteur associé à la différence d'altitude -8065 mètres. Les couples (Mont Aigoual, Pic des Spijeoles) et (Pic de la Munia, Pointe Dufour) représente le même vecteur associé à la différence d'altitude $+1501$ mètres. Les couples (Rennes, Rennes) et (Everest, Everest) définissent le vecteur nul.

Voyons comment une étendue géographique, la Bretagne par exemple, peut-être considérée comme un morceau de plan affine dirigé par \mathbf{R}^2 . Il suffit de prendre une carte de la région.



carte de bretagne

À chaque lieu a de la région est associé deux nombres (x_1, x_2) qui sont les coordonnées du point représentant ce lieu sur la carte. Considérons maintenant un second lieu b . On dispose de deux couples (x_1, x_2) et (y_1, y_2) . Le vecteur noté \overrightarrow{ab} est simplement le couple $(y_1 - x_1, y_2 - x_2)$. Inversement si on se donne non plus un lieu b mais un vecteur $u = (u_1, u_2)$ alors le lieu $T(u, a)$ est le lieu qui est représenté sur la carte par le point (z_1, z_2) dont les coordonnées sont $z_1 = x_1 + u_1$ et $z_2 = x_2 + u_2$. Le lieu $T(u, a)$ est le translaté du lieu a par la translation T_u .

2. Le barycentre, une notion affine

Soit A un espace affine de direction E . Fixons d points a_1, \dots, a_d de A et d réels r_1, \dots, r_d appelés **masses associées** aux a_i . La **masse totale** est $r = r_1 + \dots + r_d$. Si m est un point de A on lui associe le vecteur

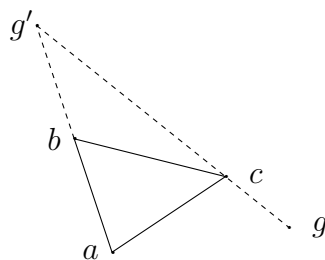
$$f(m) = r_1 \cdot a_1 m + \dots + r_d \cdot a_d m.$$

On a

$$f(m) = (r_1 \cdot \overrightarrow{a_1 a_1} + \dots + r_d \cdot \overrightarrow{a_d a_1}) + r \cdot a_1 m.$$

Si r est nul alors f est constante et vaut $(r_1 \cdot \overrightarrow{a_1 a_1} + \dots + r_d \cdot \overrightarrow{a_d a_1})$. Si r est non nul alors f est une application affine bijective. Il existe un unique point g de A tel que $f(g) = 0$. Ce point s'appelle **barycentre** de $(a_1, r_1), \dots, (a_d, r_d)$. Les couples (a_i, r_i) s'appellent **points pondérés**. Il peut être intéressant de considérer le couple pondéré (g, r) . On dit alors que le couple (g, r) est le barycentre de $(a_1, r_1), \dots, (a_d, r_d)$ et on écrit

$$(g, r) = ((a_1, r_1), \dots, (a_d, r_d)).$$



g' est le barycentre de $(a, 1)$ et $(b, -2)$
 g est le barycentre de $(a, 1)$, $(b, -2)$ et $(c, 4)$
 c est aussi le barycentre de $(g', -1)$ et $(c, 4)$

Soit o un point quelconque de A . Le barycentre g précédent est l'unique point tel que

$$\overrightarrow{og} = (1/r) \cdot (r_1 \cdot \overrightarrow{oa_1} + \dots + r_d \cdot \overrightarrow{oa_d}).$$

On remarque que si s est un réel non nul alors g est aussi le barycentre de $(a_1, sr_1), \dots, (a_d, sr_d)$ (on multiplie toutes les masses par le même facteur sans changer le barycentre). Le barycentre vérifie aussi une propriété d'associativité que je vais énoncé dans un cas particulier. On scinde en deux la famille $(a_1, r_1), \dots, (a_d, r_d)$. On considère le barycentre g_1 de $(a_1, r_1), \dots, (a_{d'}, r_{d'})$ et le barycentre g_2 de $(a_{d'+1}, r_{d'+1}), \dots, (a_d, r_d)$ (avec $R_1 = r_1 + \dots + r_{d'}$ et $R_2 = r_{d'+1} + \dots + r_d$ non nuls) alors g est le barycentre de $(g_1, R_1), (g_2, R_2)$. Cette propriété d'associativité s'écrit aussi

$$((a_1, r_1), \dots, (a_d, r_d)) = (((a_1, r_1), \dots, (a_{d'}, r_{d'})), ((a_{d'+1}, r_{d'+1}), \dots, (a_d, r_d))).$$

Par **CONVENTION** le barycentre de $(a_1, r_1), \dots, (a_d, r_d)$ est aussi noté

$$g = r_1 \cdot a_1 + \dots + r_d \cdot a_d.$$

C'est une convention car on n'a jamais défini l'addition de points ou la multiplication d'un point par un scalaire. On peut aussi convenir que le couple pondéré (g, r) qu'on notera $r \cdot g$ est égal à $r_1 \cdot a_1 + \dots + r_d \cdot a_d$:

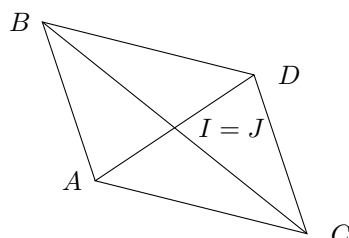
$$r \cdot g = r_1 \cdot a_1 + \dots + r_d \cdot a_d.$$

Avec ces conventions on peut écrire la propriété d'associativité de la façon suivante :

$$\begin{aligned} r \cdot g &= r_1 \cdot a_1 + \dots + r_d \cdot a_d \\ &= (r_1 \cdot a_1 + \dots + r_{d'} \cdot a_{d'}) + (r_{d'+1} \cdot a_{d'+1} + \dots + r_d \cdot a_d). \end{aligned}$$

Attention ! Ce ne sont pas les opérations habituelles mais des conventions car les r_i sont des scalaires mais les a_i des points et non des vecteurs.

Le baycentre I de deux points A et B affectés des mêmes masses est appelé **milieu** de A et B . Deux couples (A, B) et (C, D) sont équipollents si et seulement si les milieux I de A et B d'une part et J de C et D d'autre part sont confondus.



Le cas de \mathbf{R}^n . On a vu que \mathbf{R}^n pouvait être considéré comme espace affine et comme espace vectoriel. Considérons un système de points pondérés de \mathbf{R}^n affine $(a_1, r_1), \dots, (a_d, r_d)$ de masse totale non nulle r . Alors le barycentre g de $(a_1, r_1), \dots, (a_d, r_d)$ vérifie la relation vectorielle suivante

$$g = (1/r) \cdot (r_1 \cdot a_1 + \dots + r_d \cdot a_d)$$

où les a_i et g sont vus dans cette écriture comme des vecteurs. Cette relation vectorielle s'écrit aussi (en multipliant par le scalaire r)

$$r \cdot g = r_1 \cdot a_1 + \dots + r_d \cdot a_d.$$

ICI cette écriture ne résulte plus seulement d'une simple convention. Elle a le sens habituel car c'est une véritable écriture vectorielle. Ainsi, la convention dans le cadre affine général a une interprétation vectorielle très claire dans le cas de \mathbf{R}^n . Cette interprétation reste vraie dans tout espace vectoriel E considéré comme espace affine dirigé par lui-même.

Supposons de plus que la masse totale vaut 1 : $r = 1$. Alors l'identité vectorielle

$$g = r_1 \cdot a_1 + \dots + r_d \cdot a_d$$

permet de calculer le point g qui est le barycentre des points $(a_1, r_1), \dots, (a_d, r_d)$ de l'espace affine \mathbf{R}^n lorsque la masse totale est 1. C'est encore vrai dans un espace vectoriel E considéré comme espace affine dirigé par lui-même.

Le cas des segments de \mathbf{R} Par exemple si on considère deux points x et y de \mathbf{R} et t un réel quelconque alors le barycentre de x de masse t et y de masse $(1 - t)$ est le point g donné par la formule vectorielle (on est dans \mathbf{R} qu'on regarde comme espace vectoriel) $g = tx + (1 - t)y$ car $t + (1 - t) = 1$. On observe que si t est dans $[0, 1]$ alors $tx + (1 - t)y$ est entre x et y et réciproquement. De plus si x et y sont différents à tout réel g est associé un et un seul réel t tel que $g = tx + (1 - t)y$.

Le cas des segments dans un espace affine Soit a et b deux points distincts d'un espace affine A . La droite affine $\delta_{a,b} = (ab)$ qui passe par a et b est l'ensemble des points c de A de la forme $c = T_{r \cdot \overrightarrow{ab}}(b) = a + r \cdot \overrightarrow{ab}$ avec $r \in \mathbf{R}$. Observons que si $c = a + r \cdot \overrightarrow{ab}$ alors c est le barycentre noté par convention $t \cdot a + (1-t) \cdot b$ de (a, t) et $(b, (1-t))$ avec $t = 1-r$. Le **segment** $[a, b]$ est par définition l'ensemble des barycentres $t \cdot a + (1-t) \cdot b$ avec $t \in [0, 1]$. Si l'espace affine A est \mathbf{R}^n ou un espace vectoriel, ce barycentre c noté par convention $t \cdot a + (1-t) \cdot b$ (a et b vus comme points d'un espace affine) est donné aussi par l'identité vectorielle

$$c = t \cdot a + (1-t) \cdot b$$

(ici a, b et c sont vus comme des vecteurs d'un espace vectoriel).

Une caractérisation topologique d'un segment

Un sous-ensemble Y d'un espace topologique (X, \mathcal{T}) est connexe si dès que $Y \subset U_1 \cup U_2$ avec U_1, U_2 ouverts et $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ alors Y est inclus dans U_1 ou dans U_2 . L'image d'un ensemble connexe par une application continue est connexe.

Les connexes de \mathbf{R} sont les intervalles.

Si a et b sont deux points distincts d'un espace affine l'**intervalle ouvert** $]a, b[$ est la composante connexe bornée de la $\delta_{a,b} \setminus \{a, b\}$ et le segment $[a, b]$ est l'adhérence de $]a, b[$.

14.2. Barycentres et convexité dans \mathbf{R}^d .

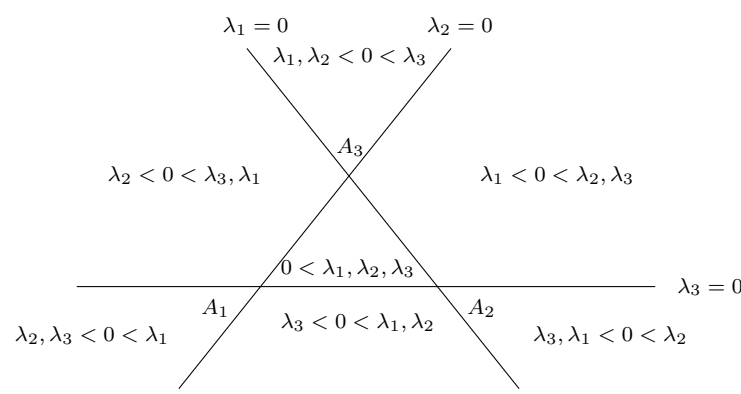
Maintenant on se place dans l'espace numérique \mathbf{R}^d qu'on considère indifféremment vectoriel et affine. Ainsi dans ce qui suit on fait **volontairement** l'amalgame entre le point M de \mathbf{R}^d et le vecteur \overrightarrow{OM} .

Soient A_1, \dots, A_n des points de \mathbf{R}^d et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels de somme $\lambda \neq 0$. Le barycentre des A_k affectés des masses λ_k est l'unique point G qui vérifie

$$G = \frac{1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} \sum_{k=1}^n \lambda_k A_k.$$

Le barycentre vérifie des propriétés d'homogénéité, de commutativité et d'associativité. Le barycentre des A_k affectés des masses λ_k est le barycentre des A_k affectés des masses $\mu \lambda_k$ (si $\mu \neq 0$) et c'est aussi celui des $A_{\sigma(k)}$ affectés des masses $\lambda_{\sigma(k)}$ si σ est une permutation des entiers $1, \dots, n$. Considérons une famille finie de points doublement indexée $A_{i,j}$ à laquelle est associé une famille de réels $\lambda_{i,j}$. On suppose que $\sum_{i,j} \lambda_{i,j} \neq 0$ et que pour chaque i , $\lambda_i = \sum_j \lambda_{i,j} \neq 0$. Si, pour chaque i fixé on note A_i le barycentre des $A_{i,j}$ affectés des masses $\lambda_{i,j}$, alors le barycentre des $A_{i,j}$ affectés des masses $\lambda_{i,j}$ est le barycentre des A_i affectés des masses λ_i .

Si (A_1, \dots, A_{d+1}) est un **repère affine** de \mathbf{R}^{d+1} (les vecteurs $\overrightarrow{A_1 A_k}$ avec $k = 2, \dots, d+1$ forment une base de \mathbf{R}^d) si $M \in \mathbf{R}^d$ il existe un unique $(d+1)$ -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_{d+1})$ pour lequel $\lambda_1 + \dots + \lambda_{d+1} = 1$ et tel que M soit le barycentre des A_k affectés des masses λ_k . Ce $(d+1)$ -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_{d+1})$ forme les **coordonnées barycentriques** de M dans le repère affine (A_1, \dots, A_{d+1}) .

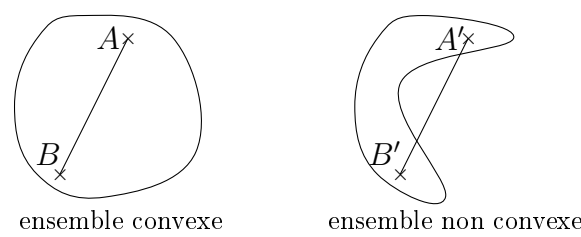


partition du plan en fonction du signe des coordonnées barycentriques

Une application $\mathcal{A} : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^f$ est affine si et seulement si pour $n \geq 1$, pour tous A_1, \dots, A_n des points de \mathbf{R}^d et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels de somme $\lambda \neq 0$ le barycentre H des $\mathcal{A}(A_k)$ affectés des masses λ_k est l'image $\mathcal{A}(G)$ du barycentre G des A_k affectés des masses λ_k .

Si $A, B \in \mathbf{R}^d$ le segment $[A, B]$ est l'ensemble des barycentres de A et B affectés de masses positives ou nulles. C'est l'image du segment $[0, 1]$ par l'application affine $t \in \mathbf{R} \mapsto tA + (1 - t)B$.

Un sous-ensemble C de \mathbf{R}^d est convexe si pour tout $(A, B) \in C^2$ le segment $[A, B]$ est inclus dans \mathbf{C} .



Le vide, \mathbf{R}^d et plus généralement tout sous-espace affine de \mathbf{R}^d sont des convexes.

Les convexes de \mathbf{R} ou d'une droite affine sont les intervalles.

Si $A \in \mathbf{R}^d$ et $r \geq 0$ la boule euclidienne de centre A et de rayon r (ouverte ou fermée) est convexe. En effet si $M, N \in \mathbf{R}^d$ et si $t \in [0, 1]$ alors $\|\overrightarrow{A(tM + (1-t)N)}\| = \|\overrightarrow{tAM} + (1-t)\overrightarrow{AN}\|$. Or l'inégalité triangulaire

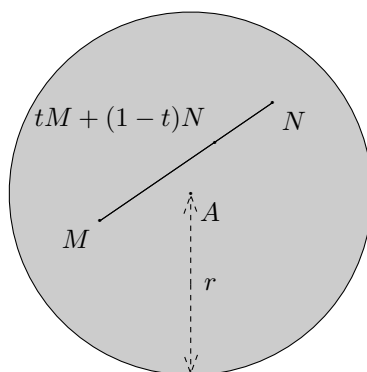
implique que

$$\|t\overrightarrow{AM} + (1-t)\overrightarrow{AN}\| \leq \|t\overrightarrow{AM}\| + \|(1-t)\overrightarrow{AN}\|$$

et donc

$$\|t\overrightarrow{AM} + (1-t)\overrightarrow{AN}\| \leq t\|\overrightarrow{AM}\| + (1-t)\|\overrightarrow{AN}\|.$$

Ainsi, si $\|\overrightarrow{AM}\|, \|\overrightarrow{AN}\| \leq r$ (ou $< r$) alors $\|\overrightarrow{A(tM + (1-t)N)}\| \leq r$ (ou $< r$).



Les sous-ensembles convexes de \mathbf{R}^d sont connexes et même connexes par arcs.

L'image et l'image réciproque d'un convexe par une application affine est un convexe. Un hyperplan affine de \mathbf{R}^d sépare \mathbf{R}^d en deux parties convexes exactement, des demi-espaces ouverts. Les demi-espaces (ouverts ou fermés) sont convexes.

L'ensemble

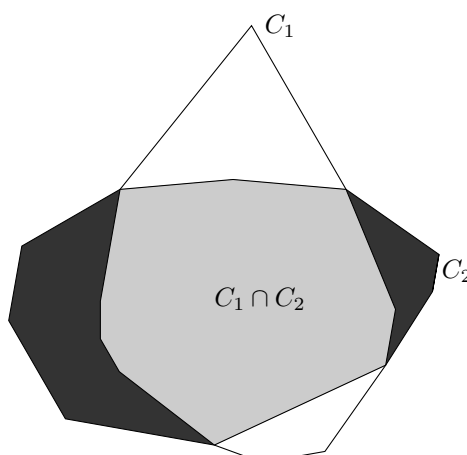
$$S_d = \{x \in \mathbf{R}^d : 0 \leq x_k \leq 1, x_1 + \dots + x_d \leq 1\}$$

et l'ensemble

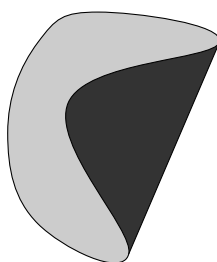
$$\mathbf{S}_d = \{y \in \mathbf{R}^{d+1} : 0 \leq y_k \leq 1, y_1 + \dots + y_{d+1} = 1\}$$

sont convexes. Un point x de \mathbf{R}^d est dans S_d si et seulement s'il existe $y \in \mathbf{S}_d$ tel que $x_k = y_k$ pour tout $k = 1, \dots, d$.

L'intersection d'une famille quelconque de convexe est convexe.



Si $X \subset \mathbf{R}^d$ est non vide l'enveloppe convexe C de X est l'intersection de tous les convexes qui contiennent X . L'enveloppe convexe existe, est non vide et c'est le plus petit convexe qui contient X . Si $X \subset Y$ alors l'enveloppe convexe de X est contenue dans celle de Y .



l'enveloppe convexe C de X

Il résulte de la propriété d'associativité du barycentre que l'enveloppe convexe C d'un ensemble X est l'ensemble des barycentres des familles finies de points de X affectés de masses positives ou nulles. En particulier si $X = \{A_1, \dots, A_n\}$ est un ensemble fini alors l'enveloppe convexe C des A_k est l'ensemble des points A barycentres des A_k affectés de masses positives ou nulles. De plus dans ce cas l'enveloppe C est compacte car c'est l'image du compact

$$\{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) : \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0\}$$

par l'application continue

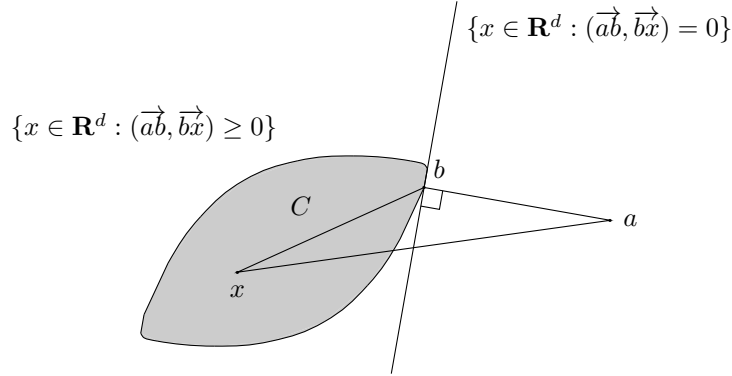
$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \sum_{k=1}^n \lambda_k A_k.$$

On muni \mathbf{R}^d de sa structure euclidienne usuelle. Incidemment \mathbf{R}^d est muni d'une topologie et on peut s'intéresser aux convexes qui sont fermés. Si C est un fermé convexe de \mathbf{R}^d et $a \in \mathbf{R}^d \setminus C$ alors il existe un unique point b de C

tel que si $x \in C$ alors $d(a, x) \geq d(a, b)$. De plus le convexe C est inclus dans le demi-espace $\{x \in \mathbf{R}^d : (\vec{ab}, \vec{bx}) \geq 0\}$ bordé par l'hyperplan orthogonal à la droite (a, b) et qui passe par b . Prouvons ce résultat. Soit $c \in C$ fixé. On pose $R = 2\|\vec{ac}\|$. Puisque $a \notin C$, $a \neq c$ et $R > 0$. L'intersection C_R du fermé C et de la boule compacte $\{x \in \mathbf{R}^d : d(a, x) \leq 2R\}$ est non vide (c est dedans) et compacte. La fonction $x \in C_R \mapsto d(a, x)$ qui est continue sur ce compact atteint donc un minimum en un point b . On a $d(a, b) \leq d(a, x) \leq R$ si $x \in C_R$ et $d(a, x) > R \geq d(a, b)$ si $x \in C \setminus C_R$. Par conséquent b est le minimum recherché si $x \in C$ alors $d(a, x) \geq d(a, b)$. De plus si $x \in C$ alors $[b, x] \subset C$ (convexité de C) donc $tx + (1-t)b \in C$ si $t \in [0, 1]$ et donc $g(t) = d(a, tx + (1-t)b)^2 \geq d(a, b)^2 = g(0)$ si $t \in [0, 1]$. La fonction g restreinte à $[0, 1]$ atteint un minimum en 0. Or

$$\begin{aligned} g(t) = d(a, tx + (1-t)b)^2 &= (tx + (1-t)b - a, tx + (1-t)b - a) \\ &= (t\vec{bx} + \vec{ab}, t\vec{bx} + \vec{ab}) \\ &= t^2(\vec{bx}, \vec{bx}) + 2t(\vec{ab}, \vec{bx}) + (\vec{ab}, \vec{ab}). \end{aligned}$$

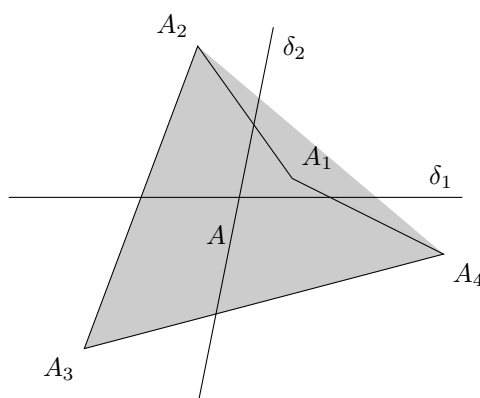
Ainsi la fonction g est dérivable et sa dérivée en 0 vaut $g'(0) = 2(\vec{ab}, \vec{bx})$. Par conséquent si $(\vec{ab}, \vec{bx}) < 0$ alors $g'(0) < 0$ et g restreinte à $[0, 1]$ ne peut atteindre de minimum en 0. Par contraposée on obtient le résultat voulu : si $x \in C$ alors $(\vec{ab}, \vec{bx}) \geq 0$.



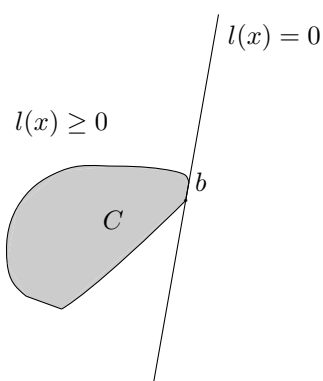
L'intersection d'une droite et d'un convexe est un intervalle de cette droite.

Si (A, B, C) forment un triangle non dégénéré de \mathbf{R}^2 ((A, B, C) est un repère affine) alors l'enveloppe convexe de (A, B, C) est le triangle *plein* usuel. Il est formé des points de coordonnées barycentriques (par rapport au repère (A, B, C)) toutes positives ou nulles.

Si $C \subset \mathbf{R}^2$ est convexe et δ est une droite alors $C \setminus \delta$ est formé d'un ou deux convexes disjoints. En particulier, deux droites δ_1 et δ_2 qui sont sécantes en un point A séparent l'espace en quatre parties convexes. De plus A est à l'intérieur de l'enveloppe convexe de tout quadruplet (A_1, A_2, A_3, A_4) de points pris dans chacune de ces composantes.



Si $C \subset \mathbf{R}^2$ est un convexe et b un point du bord de C alors il existe une forme affine non dégénérée l telle que $l(b) = 0$ et $C \subset \{l \geq 0\}$. La droite d'équation $l = 0$ s'appelle droite d'appui du convexe C en b . Le demi-plan $\{l \geq 0\}$ s'appelle demi-plan d'appui du convexe en b .



Si (A_0, \dots, A_d) forment un repère affine de \mathbf{R}^d alors l'enveloppe convexe C de ces points est l'ensemble des points dont les coordonnées barycentriques dans ce repère sont positives ou nulles. C'est un compact de \mathbf{R}^d . L'intérieur $\text{Int}(C)$ de C est l'ensemble des points dont les coordonnées barycentriques sont toutes strictement positives et la frontière $C \setminus \text{Int}(C)$ est donc l'ensemble des points dont les coordonnées barycentriques sont positives ou nulles et l'une d'entre elles est nulle.

15. Diverses façons de prouver $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin(t)}{t} = 1$ suivant les prérequis admis (avec le groupe du jeudi).

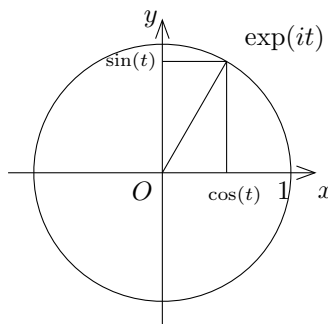
Lorsqu'on sait que $\sin(t) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$ pour $t \in \mathbf{R}$ le résultat est immédiat car alors on écrit $\frac{\sin(t)}{t} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}$ si $t \neq 0$ et par passage à la limite on obtient $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin(t)}{t} = 1$

Lorsqu'on sait que le sinus est nul et dérivable en 0 et que sa dérivée en 0 vaut 1 le résultat est immédiat car $\frac{\sin(t)}{t}$ est le taux d'accroissement du sinus entre 0 et t et la limite de ce taux quand t tend vers 0 est la dérivée du sinus en 0.

On peut aussi considérer le demi-cercle $\{x^2 + y^2 = 1, x > 0\}$. C'est le graphe de la fonction qui à $y \in]-1, 1[$ associe $f(y) = x = \sqrt{1 - y^2}$. Calculons la longueur d'arc de cercle $t(y)$ entre $(1, 0)$ et $(\sqrt{1 - y^2}, y)$. On a

$$t(y) = \int_0^y \sqrt{1 + f'^2(u)} du = \int_0^y \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} \text{ si } y \in]-1, 1[.$$

La fonction $t(y)$ est une fonction de classe C^1 , nulle à l'origine, impaire et $t'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$. Sa dérivée est strictement positive et vaut 1 en 0. Par conséquent il existe $\delta > 0$ (en fait $\delta = \frac{\pi}{2}$) tel que t soit une bijection strictement croissante, dérivable de $] - 1, 1[$ dans $] - \delta, \delta[$ et dont la réciproque appelée \sin est dérivable. On a $\sin'(t) = \frac{1}{t'(\sin(t))} = \sqrt{1 - \sin^2(t)}$. En particulier $\sin'(0) = 1 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t}$.



Soit $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$. On considère le secteur

$$S_t = \{r \exp(i\theta) : 0 < r < 1, 0 < \theta < t\},$$

le triangle

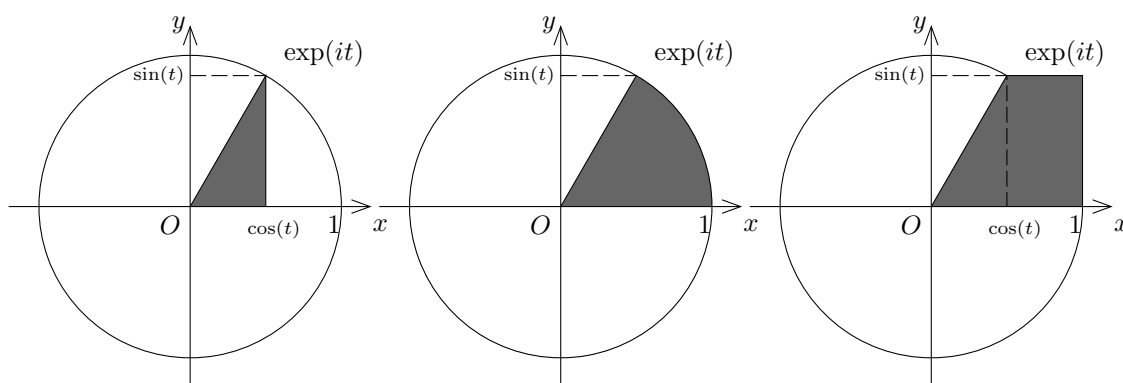
$$\Delta_t = S_t \cap \{x < \cos(t)\}$$

et le trapèze

$$T_t = S_t \cup \{(x, y) : \cos(t) \leq x < 1, 0 < y < \sin(t)\}.$$

On a $\Delta_t \subset S_t \subset T_t$ par conséquent

$$\text{Aire}(\Delta_t) \leq \text{Aire}(S_t) \leq \text{Aire}(T_t).$$



Mais si on admet que

$$\begin{aligned} \text{Aire}(\Delta_t) &= \frac{\sin(t) \cos(t)}{2} \\ \text{Aire}(S_t) &= \frac{t}{2} \\ \text{Aire}(T_t) &= \frac{(2 - \cos(t)) \sin(t)}{2} \end{aligned}$$

on a

$$\frac{1}{2 - \cos(t)} \leq \frac{\sin(t)}{t} \leq \frac{1}{\cos(t)}.$$

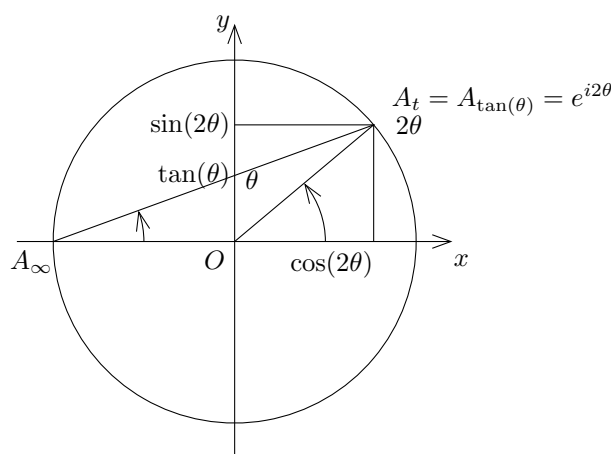
Si on admet aussi que $0 \leq \sin(t) \leq t$ lorsque $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$ on déduit par le théorème d'encadrement d'abord que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \sin(t) = 0$ puis que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \cos(t) =$

$\lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{1 - \sin^2(t)} = 1$ et donc par passage à la limite dans l'encadrement de $\frac{\sin(t)}{t}$ il vient

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin(t)}{t} = 1.$$

16. Paramétrisation du cercle par les droites passant par un de ses points. Application à la résolution dans \mathbf{Q}^2 de l'équation $x^2 + y^2 = 1$.

Soit S_1 le cercle unité centré à l'origine de \mathbf{R}^2 : $S_1 = \{x^2 + y^2 = 1\}$. Les droites qui passent par le point $A_\infty = (-1, 0)$ sont les ensembles de la forme $\delta_t = \{y = t(x + 1)\}$ avec $t \in \mathbf{R}$ et l'axe $\{x = -1\}$. Si $t \in \mathbf{R}$ la droite δ_t coupe $S_1 \setminus \{A_\infty\}$ en un unique point A_t de coordonnées $x_t = \frac{t^2-1}{1+t^2}$ et $y_t = \frac{2t}{1+t^2}$. Remarquons que si $t \in \mathbf{R}$ il existe un et un seul $\theta \in]-\pi, \pi[$ tel que $t = \tan(\theta)$. On a alors $x_t = \cos(2\theta)$ et $y_t = \sin(2\theta)$ c'est à dire $x_{\tan(\theta)} + iy_{\tan(\theta)} = \exp(i2\theta)$. On retrouve le théorème de l'angle au centre.



L'application de $A : t \in \mathbf{R} \cup \{\infty\} \mapsto A_t \in S_1$ est une bijection de \mathbf{R} sur S_1 . Sa réciproque est l'application A^{-1} qui à $(x, y) \in S_1$ associe $t = A^{-1}(x, y) = \frac{y}{x+1}$ si $(x, y) \neq A_\infty$ et qui associe ∞ à A_∞ .

On remarque que $A(\mathbf{Q} \cup \{\infty\}) \subset \mathbf{Q}^2 \cap S_1$ et $A^{-1}(\mathbf{Q}^2 \cap S_1) \subset \mathbf{Q} \cup \{\infty\}$. Par conséquent la restriction de l'application A à $\mathbf{Q} \cup \{\infty\}$ est une bijection sur $\mathbf{Q}^2 \cap S_1$: si $(x, y) \in \mathbf{Q}^2$ vérifie $x^2 + y^2 = 1$ alors $(x, y) = (-1, 0)$ ou il existe un unique $t \in \mathbf{Q}$ tel que $x = \frac{t^2-1}{1+t^2}$ et $y = \frac{2t}{1+t^2}$.

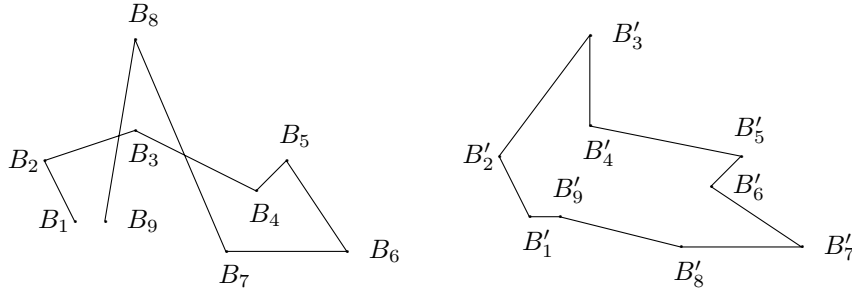
17. Polygones convexes et étoilés. Divers exercices qui permettent de résoudre le problème de Dido pour les lignes polygonales.

17.1. Plus courte ligne polygonale reliant un ensemble fini de points du plan.

Soit B_1, \dots, B_{l+1} des points de \mathbf{R}^2 . La ligne polygonale Γ formée des segments $[B_i, B_{i+1}]$, $i = 1, \dots, l$ peut être paramétrée par l'application continue et affine par morceaux de $[0, 1]$ dans \mathbf{R}^2 définie par $\gamma(t) = l(\frac{i}{l} - t)B_i + l(t - \frac{i-1}{l})B_{i+1}$ si $t \in [\frac{i-1}{l}, \frac{i}{l}]$ et $i \in [1, \dots, l]$. La ligne polygonale est dite *fermée* si $B_{l+1} = B_1$. Elle est dite *sans point double* si $\gamma(t) = \gamma(s)$ et $t < s$ implique $t = 0$ et $s = 1$. La longueur de γ est la somme

$$\text{longueur}(\gamma) = \sum_{i=1}^l B_i B_{i+1}.$$

Les points B_i s'appellent sommets de la ligne polygonale.



ligne polygonale

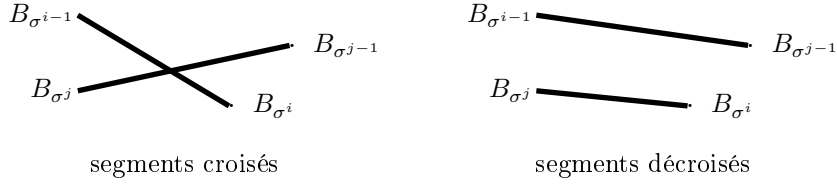
ligne polygonale fermée et sans point double

On suppose que $B_{l+1} = B_1$. On associe à tout cycle σ de $\{1, \dots, l\}$ de longueur l la ligne polygonale fermée $\gamma(\sigma)$ qui est formée des segments $[B_{\sigma^{i-1}}, B_{\sigma^i}]$, $i = 1, \dots, l$ où $\sigma^i = \sigma^{\circ i}(1)$ si $i = 1, \dots, l$. On note $L(\sigma)$ la longueur de $\gamma(\sigma)$. Il existe $(l-1)!$ cycles de $\{1, \dots, l\}$ de longueur l donc l'ensemble des longueurs $L(\sigma)$ est fini et il existe σ_0 pour laquelle la longueur $L(\sigma_0)$ est minimale.

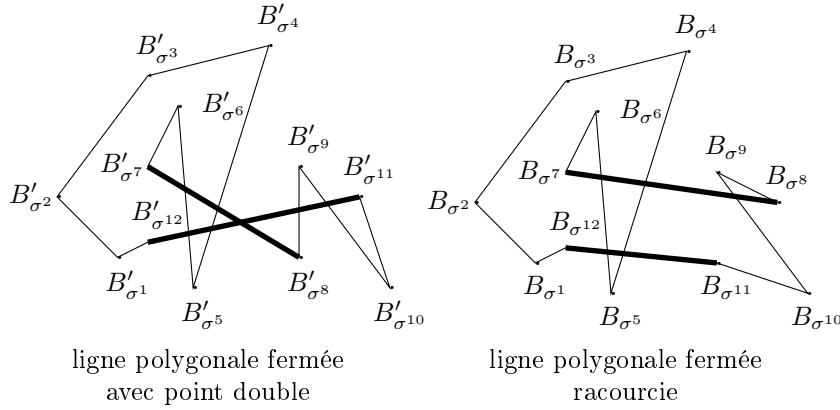
On va prouver que la ligne polygonale fermée $\gamma(\sigma_0)$ de longueur minimale est sans point double.

On raisonne par contraposée. Il suffit de prouver qu'une ligne polygonale $\gamma(\sigma)$ qui possède au moins un point double n'est pas de longueur maximale. Soit $\gamma(\sigma)$ une ligne polygonale. Supposons qu'il existe deux indices $i, j \in \{1, \dots, l\}$ avec $i+1 < j$ tels que $[B_{\sigma^{i-1}}, B_{\sigma^i}] \cap [B_{\sigma^{j-1}}, B_{\sigma^j}]$ soit non vide et $B_{\sigma^{i-1}}, B_{\sigma^i}, B_{\sigma^{j-1}}$ et B_{σ^j} ne soient pas tous les quatre alignés. L'hypothèse de non alignement implique que l'intersection $[B_{\sigma^{i-1}}, B_{\sigma^i}] \cap [B_{\sigma^{j-1}}, B_{\sigma^j}]$ est exactement un point noté P qui ne peut être simultanément sur les droites $(B_{\sigma^{i-1}}B_{\sigma^{j-1}})$ et $(B_{\sigma^i}B_{\sigma^j})$. On déduit alors de l'inégalité triangulaire que

$$\begin{aligned} B_{\sigma^{i-1}}B_{\sigma^i} + B_{\sigma^{j-1}}B_{\sigma^j} &= B_{\sigma^{i-1}}P + PB_{\sigma^i} + B_{\sigma^{j-1}}P + PB_{\sigma^j} \\ &= B_{\sigma^{i-1}}P + PB_{\sigma^{j-1}}B_{\sigma^i}P + PB_{\sigma^j} \\ &< B_{\sigma^{i-1}}B_{\sigma^{j-1}} + B_{\sigma^i}B_{\sigma^j}. \end{aligned}$$

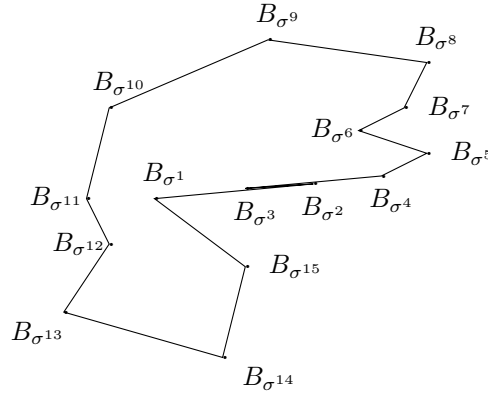


Considérons la ligne polygonale obtenue à partir de $\gamma(\sigma)$ en remplaçant les segments $[B_{\sigma^{i-1}}, B_{\sigma^i}]$ et $[B_{\sigma^{j-1}}, B_{\sigma^j}]$ par les segments $[B_{\sigma^{i-1}} B_{\sigma^{j-1}}]$ et $[B_{\sigma^i} B_{\sigma^j}]$. Cette ligne est associée au cycle σ' suivant. Si $k \leq i-1$ ou $k \geq j$ alors $\sigma'^k = \sigma^k$. Si $i \leq k < j$ alors $\sigma'^k = \sigma^{j-1+i-k}$. D'après les inégalités précédentes $L(\sigma') < L(\sigma)$. Cette première étape montre que si $[B_{\sigma^{i-1}}, B_{\sigma^i}] \cap [B_{\sigma^{j-1}}, B_{\sigma^j}]$ est non vide alors $B_{\sigma^{i-1}}, B_{\sigma^i}, B_{\sigma^{j-1}}$ et B_{σ^j} sont alignés. Ceci résout complètement la question quand il n'y pas de triplets de B_i alignés.



Il suffit de considérer maintenant une ligne polygonale $\gamma(\sigma)$ telle que si $[B_{\sigma^{i-1}}, B_{\sigma^i}]$ et $[B_{\sigma^{j-1}}, B_{\sigma^j}]$ ont un point commun alors $B_{\sigma^{i-1}}, B_{\sigma^i}, B_{\sigma^{j-1}}$ et B_{σ^j} sont alignés. Montrons que si $\gamma(\sigma)$ est de longueur minimale alors elle n'a pas de point double. Raisonnons par contraposée. Si $\gamma(\sigma)$ a un point double il existe deux indices $i, j \in \{1, \dots, l\}$ avec $i+1 < j$ tels que $[B_{\sigma^{i-1}}, B_{\sigma^i}] \cap [B_{\sigma^{j-1}}, B_{\sigma^j}]$ soit non vide. Les points $B_{\sigma^{i-1}}, B_{\sigma^i}, B_{\sigma^{j-1}}$ et B_{σ^j} sont alignés sur une droite δ et $[B_{\sigma^{i-1}}, B_{\sigma^i}] \cup [B_{\sigma^{j-1}}, B_{\sigma^j}]$. On considère la composante connexe de $\delta \cap \gamma(\sigma)$ qui contient ce segment. C'est un segment $[P, Q]$. Si $[B_{\sigma^{i-1}}, B_{\sigma^i}]$ rencontre $]P, Q[$ alors $[B_{\sigma^{i-1}}, B_{\sigma^i}] \subset [P, Q]$. Quitte à décaler les indices, on peut supposer que $B_{\sigma^0} = B_1$ n'est pas dans ce segment $[P, Q]$. Il existe des couples (i, j) avec $i < j < l+1$ tels que $[B_{\sigma^{k-1}}, B_{\sigma^k}] \subset [P, Q]$ pour tout $k = i, \dots, j-1$. On choisit un tel couple noté (i_0, j_0) qui soit maximal, c'est à dire que (i_0-1, j_0) et (i_0, j_0+1) ne vérifient pas cette propriété. Un tel couple existe, sinon tous les points seraient sur δ . L'hypothèse d'alignement et le fait que $B_{\sigma^i} \neq B_{\sigma^j}$ si $i \neq j$ impliquent que $B_{\sigma^{i_0-1}}$ et $B_{\sigma^{j_0}}$ sont égaux l'un à P et l'autre à Q . Les points doubles de $\gamma(\sigma)$ sur $[P, Q]$ sont nécessairement sur $]P, Q[$. Supposons qu'il existe un second couple maximal (i_1, j_1) .

Alors $B_{\sigma^{i_1}}$ et $B_{\sigma^{j_1}}$ sont égaux l'un à P et l'autre à Q . Puisque $B_{\sigma^i} \neq B_{\sigma^j}$ si $i \neq j$ on a $(i_0, j_0) = (i_1, j_1)$ et le couple (i_0, j_0) maximal est unique. On met un ordre sur le segment $[B_{\sigma^{i_0-1}}, B_{\sigma^{j_0}}]$ en considérant $B_{\sigma^{i_0-1}} < B_{\sigma^{j_0}}$. Les $B_{\sigma^i}, i = i_0 - 1, \dots, j_0$ sont tous différents et peuvent être ordonnés sur $[P, Q]$ en $P = C_{i_0-1} < \dots < C_{j_0} = Q$. Puisque $\gamma(\sigma)$ a un point double sur ce segment, les $B_{\sigma^i}, i = i_0 - 1, \dots, j_0$ ne respectent pas cet ordre et la portion de $\gamma(\sigma)$ qui visite $[P, Q]$ (elle correspond aux segments $[B_{\sigma^{i-1}}, B_{\sigma^i}]$ avec $i_0 \leq i \leq j_0$) est strictement plus longue que la distance $B_{\sigma^{i_0-1}} B_{\sigma^{j_0}}$.



$B_4 B_1, B_2, B_3$ et B_4 sont alignés mais désordonnés

Quitte à remplacer σ par σ' en posant $B_{\sigma^i} = C_i$ si $i = i_0 - 1, \dots, j_0$ on obtient une courbe $\gamma(\sigma')$ sans point double sur $]P, Q[$ et qui est strictement plus courte que $\gamma(\sigma)$. Ceci achève la preuve. Une courbe polygonale fermée $\gamma(\sigma)$ de sommets les B_i et qui minimise la longueur n'a pas de point double.

17.2. Courbe polygonale bordant l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points du plan

Soit $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ des points de \mathbf{R}^2 . L'enveloppe convexe C des A_k est l'ensemble des points A barycentres des A_k affectés de masses positives ou nulles. L'ensemble C est compact car c'est l'image du compact

$$\{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) : \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0\}$$

par l'application continue

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k A_k.$$

Si les A_k sont tous alignés alors leur enveloppe convexe est un segment dont les extrémités sont dans \mathcal{A} . On suppose que les A_k ne sont pas tous alignés. Nous allons montrer qu'il existe B_1, \dots, B_l des points tous différents de \mathcal{A} , trois à trois non alignés et tels que la ligne polygonale fermée γ formée des segments $[B_i, B_{i+1}], i = 1, \dots, l$ (avec $B_{l+1} = B_1$) soit sans point-double,

forme le bord $C \setminus \text{Int}(C)$ de C et telle que l'enveloppe convexe des B_i soit C . De plus C est l'intersection des demi-plans qui le contiennent et qui sont portés par ses côtés, les segments $[B_i, B_{i+1}]$.

En utilisant la propriété d'associativité des barycentres (et des barycentres associés à des points de masses positives) on constate que \mathcal{A} peut être supposé sans triplets de points alignés.

On va raisonner par récurrence sur le cardinal de \mathcal{A} . Puisque les A_k ne sont pas tous alignés, \mathcal{A} possède au moins trois éléments.

Supposons que \mathcal{A} est formé de trois points. Par hypothèse, ils ne sont pas alignés. Ils forment un triangle non dégénéré. On peut vérifier facilement le résultat annoncé : l'enveloppe convexe est

$$C = \{xA_1 + yA_2 + (1 - x - y)A_3 : 0 \leq x, y \leq x + y \leq 1\},$$

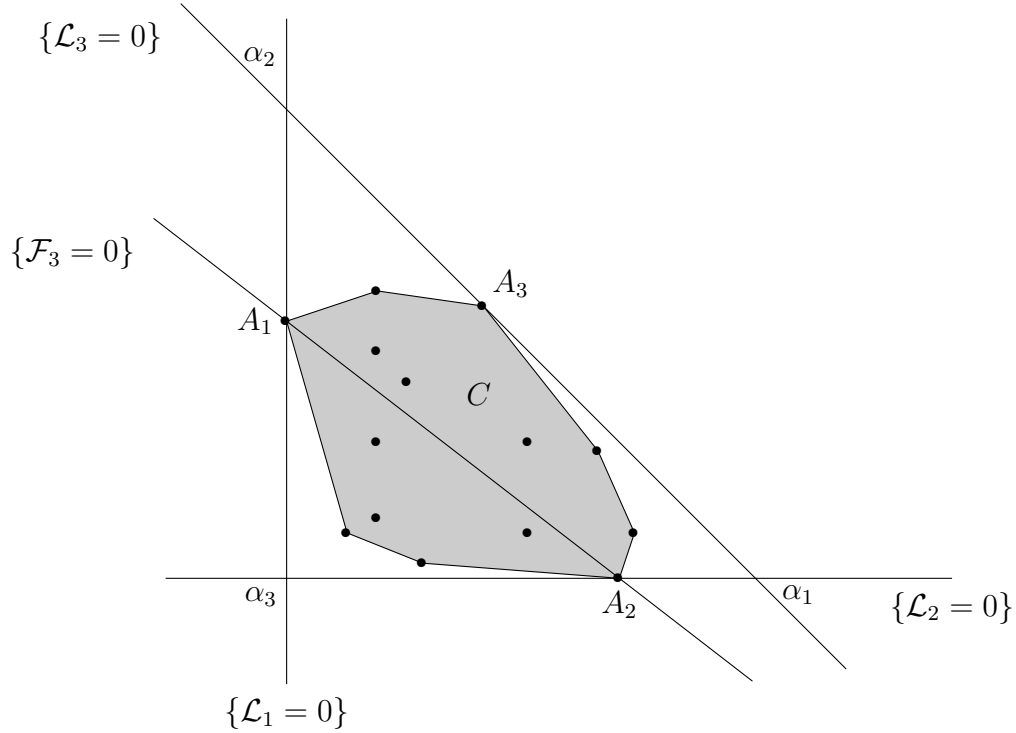
son intérieur est

$$\text{Int}(C) = \{xA_1 + yA_2 + (1 - x - y)A_3 : 0 < x, y < x + y < 1\}$$

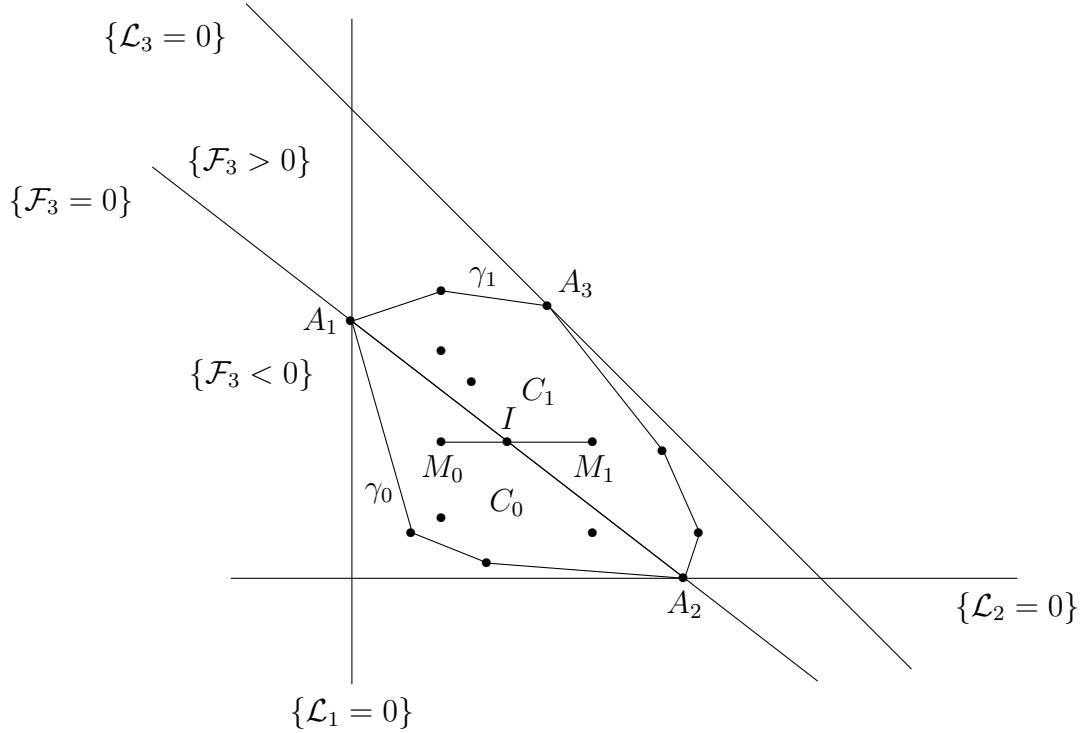
et son bord est la réunion des segments $[A_1, A_2]$, $[A_2, A_3]$ et $[A_3, A_1]$. C'est une ligne polygonale sans point double. De plus dans un repère cartésien dont l'origine est A_1 et la base de plan directeur $(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3})$ le convexe C est l'ensemble

$$C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, 1 - (x + y) \geq 0\}.$$

Soit $n \geq 4$. Supposons avoir prouvé le résultat pour toute famille d'au plus $n - 1$ points. Considérons les trois formes linéaires $\mathcal{L}_1 = x$, $\mathcal{L}_2 = y$ et $\mathcal{L}_3 = -(x + y)$. Quitte à permuter les A_k on peut supposer que $\mathcal{L}_1(A_1) \leq \mathcal{L}_1(A_k)$, $\mathcal{L}_2(A_2) \leq \mathcal{L}_2(A_k)$ et $\mathcal{L}_3(A_3) \leq \mathcal{L}_3(A_k)$ pour tout k . Quitte à retirer une constante à chaque \mathcal{L}_i on peut supposer que $\mathcal{L}_i(A_i) = 0$ si $i = 1, 2, 3$. Si $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ tous différents il existe une forme affine \mathcal{F}_i qui définit la droite (A_jA_k) et telle que $\mathcal{F}_i(A_i) > 0$. Enfin on note α_i le point d'intersection des droites $\{\mathcal{L}_j = 0\}$ et $\{\mathcal{L}_k = 0\}$.



Par construction, \mathcal{A} est inclus dans l'enveloppe convexe K de α_1, α_2 et α_3 . Par conséquent l'enveloppe convexe C est un inclus dans K . Si \mathcal{A} est inclus dans l'enveloppe convexe des trois points A_1, A_2 et A_3 alors l'enveloppe convexe de \mathcal{A} et celle des trois points sont confondues et on est ramené au cas où $n = 3$. Supposons donc que \mathcal{A} n'est pas dans l'enveloppe convexe des trois A_1, A_2 et A_3 . Quitte à permuter les indices 1, 2 et 3 on peut supposer qu'il existe un A_{k_0} qui est dans l'enveloppe convexe des points A_1, A_2 et α_3 sans être sur le segment $[A_1, A_2]$. On a $\mathcal{F}_3(A_{k_0}) < 0$. L'intervalle $]A_1, A_2[$ est à l'intérieur de l'enveloppe convexe de A_1, A_2, A_3 et A_{k_0} . On considère le recouvrement de \mathcal{A} en deux sous-ensembles $\mathcal{A}_0 = \{A_k : \mathcal{F}_3(A_k) \leq 0\}$ et $\mathcal{A}_1 = \{A_k : \mathcal{F}_3(A_k) \geq 0\}$ de cardinaux strictement inférieurs à n ($A_{k_0} \in \mathcal{A}_0 \setminus \mathcal{A}_1$ et $A_3 \in \mathcal{A}_1 \setminus \mathcal{A}_0$) et supérieurs ou égaux à 3 ($A_1, A_2 \in \mathcal{A}_0 \cap \mathcal{A}_1$). Notons C_0 et C_1 les enveloppes convexes de \mathcal{A}_0 et \mathcal{A}_1 . On a $C_0 \cap C_1 = [A_1, A_2]$ et $C_0 \cup C_1 = C$. En effet $[A_1, A_2]$ est inclus dans $C_0 \cap C_1$ et $C_0 \subset \{\mathcal{F}_3 \leq 0\} \cap K$, $C_1 \subset \{\mathcal{F}_3 \geq 0\} \cap K$ donc $C_0 \cap C_1 \subset \{\mathcal{F}_3 = 0\} \cap K = [A_1, A_2]$. Pour montrer que $C_0 \cup C_1 = C$ il suffit de montrer que cette réunion est convexe. Puisque C_0 et C_1 sont convexes il suffit de montrer que si $M_0 \in C_0$ et $M_1 \in C_1$ alors le segment $[M_0, M_1]$ est inclus dans C .



Un tel segment est inclus dans K et la fonction \mathcal{F}_3 restreinte à ce segment change de signe ($\mathcal{F}_3(M_0) \leq 0$ et $\mathcal{F}_3(M_1) \geq 0$) donc s'annule. Il existe donc un point I de $[M_0, M_1]$ tel que $\mathcal{F}_3(I) = 0$. Ainsi $I \in [A_1, A_2] = C_0 \cap C_1$, $[M_0, I] \subset C_0$, $[I, M_1] \subset C_1$ et $[M_0, M_1] \subset C_0 \cup C_1$. En appliquant l'hypothèse de récurrence à \mathcal{A}_0 et \mathcal{A}_1 on obtient deux lignes polygonales fermées et sans point double γ_0 et γ_1 dont les sommets sont respectivement dans \mathcal{A}_0 et \mathcal{A}_1 , telles que chaque γ_i borde l'enveloppe convexe C_i de \mathcal{A}_i et telles que $\gamma_0 \cap \gamma_1 = [A_1, A_2]$ (il faut peut-être changer le sens de parcours des lignes polygonales γ_i). De plus chaque C_i est l'intersection des demi-plans qui le contiennent et qui sont portés par ses côtés. Plus précisément notons $B_1 = A_1, \dots, B_r = A_2$ les sommets successifs de γ_0 et $B_r = A_2, \dots, B_l, B_{l+1} = A_1$ ceux de γ_1 . Si $i = 1, \dots, l$ on note δ_i la droite qui contient $[B_i, B_{i+1}]$, \mathcal{H}_i le demi-plan fermé de bord δ_i et qui est contenu dans \mathcal{A}_0 ou \mathcal{A}_1 (suivant que $i < r$ ou pas) et \mathcal{L}_i une forme affine telle que $\delta_i = \{\mathcal{L}_i = 0\}$ et $\mathcal{H}_i = \{\mathcal{L}_i \geq 0\}$. On note δ la droite $(A_1 A_2)$ et pour $i = 0, 1$, \mathcal{H}^i le demi-plan bordé par cette droite et qui contient \mathcal{A}_i ($\mathcal{H}^0 = \{\mathcal{F}_3 \leq 0\}$ et $\mathcal{H}^1 = \{\mathcal{F}_3 \geq 0\}$ où \mathcal{F}_3 une forme affine qui a été introduite précédemment).

Les γ_i bordent les C_i et $\gamma_0 \cap \gamma_1 = [A_1, A_2]$. De plus l'intervalle $]A_1, A_2[$ est à l'intérieur de l'enveloppe convexe de A_1, A_2, A_3 et A_{k_0} donc à l'intérieur de C . Ainsi les segments formant γ_0 et γ_1 sauf $[A_1, A_2]$ mis bout à bout forment la ligne polygonale fermée de sommets $B_1 = A_1, \dots, B_l, B_{l+1}$ et sans point

double qui borde C et les sommets de cette ligne polygonale ont C comme enveloppe convexe.

De plus $\mathcal{H}_0 \cup \mathcal{H}_1 = \mathbf{R}^2$ et

$$C_0 = \mathcal{H}^0 \cap \left(\bigcap_{i=1}^{r-1} \mathcal{H}_i \right) \text{ et } C_1 = \mathcal{H}^1 \cap \left(\bigcap_{i=r}^l \mathcal{H}_i \right).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \left(\bigcap_{i=1}^l \mathcal{H}_i \right) &= \left[\mathcal{H}^0 \cap \left(\bigcap_{i=1}^{r-1} \mathcal{H}_i \right) \right] \cup \left[\mathcal{H}^1 \cap \left(\bigcap_{i=r}^l \mathcal{H}_i \right) \right] \\ &\subset \left[\mathcal{H}^0 \cap \left(\bigcap_{i=1}^{r-1} \mathcal{H}_i \right) \right] \cup \left[\mathcal{H}^1 \cap \left(\bigcap_{i=r}^l \mathcal{H}_i \right) \right] \\ &\subset C_0. \end{aligned}$$

Or si M est un point de C_0 (respectivement de C_1) et $i \geq r$ (respectivement $i < r$) alors (A_1, A_2, B_i) forme un repère affine et les coordonnées barycentriques (λ, μ, ν) de M dans ce repère vérifient $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$ et $\nu \leq 0$. Or $\mathcal{L}_i(A_1), \mathcal{L}_i(A_2) \geq 0$ et $\mathcal{L}_i(B_i) = 0$. Par conséquent $\mathcal{L}_i(M) \geq 0$ et $M \in \mathcal{H}_i$. Ceci prouve

$$C_1 \subset \bigcap_{i=1}^{r-1} \mathcal{H}_i \text{ et } C_0 \subset \bigcap_{i=r}^l \mathcal{H}_i$$

et donc

$$C_1 \subset \bigcap_{i=1}^l \mathcal{H}_i \text{ et } C_0 \subset \bigcap_{i=1}^l \mathcal{H}_i.$$

Ceci signifie que $C = C_0 \cup C_1$ est inclus dans $\bigcap_{i=1}^l \mathcal{H}_i$. Ceci prouve par double inclusion que

$$C = \bigcap_{i=1}^l \mathcal{H}_i.$$

L'intersection d'une droite δ avec C est vide ou réduite à un point ou un segment non trivial. Si $\delta \cap C$ est un segment convexe $[A, B]$ avec $A \neq B$ alors soit il rencontre trois points du bord et c'est alors un côté de C soit il rencontre seulement deux points du bord et $]A, B[$ est à l'intérieur de C . Dans ce cas δ sépare C en deux composantes connexes disjointes, chacune d'elles contient des sommets de C .

Soit γ' une autre courbe polygonale dont les sommets sont les sommets B_i de γ et différente de γ . Quitte à décaler les indices et à changer le sens de parcours de γ' il existe i, k, h , et k' tels que $B'_1 = B_1$, $B'_2 = B_i$, $B'_{k'} = B_k$

et $B'_{k'+1} = B_h$ avec $1 < k < i < h' > 2$. Alors le segment $[B'_1, B'_2] = [B_1, B_i]$ sépare C en deux composantes connexes, l'une contient $B'_{k'} = B_k$ et l'autre contient $B'_{k'+1} = B_h$. Par conséquent les segments $[B'_1, B'_2]$ et $[B'_{k'}, B'_{k'+1}]$ ont un point commun et la courbe γ' a un point double. Elle n'est pas de longueur minimale.

17.3. Comment tourne la ligne polygonale bordant un polygône convexe.

À propos de l'orientation.

On sait que si $A, B \in GL_n(\mathbf{R})$ alors $\det(AB) = \det A \det B$: le déterminant est un morphisme du groupe $GL_n(\mathbf{R})$ dans \mathbf{R} . En particulier le produit de deux matrices dont les déterminants sont de même signe a un déterminant positif. Considérons maintenant trois bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ et \mathcal{B}_3 de \mathbf{R}^n et notons pour $i, j \in \{1, 2, 3\}$ $P_{\mathcal{B}_i \mathcal{B}_j}$ la matrice des coordonnées dans la base \mathcal{B}_i des vecteurs de la base \mathcal{B}_j . On $P_{\mathcal{B}_i \mathcal{B}_j} = P_{\mathcal{B}_i \mathcal{B}_k} P_{\mathcal{B}_k \mathcal{B}_j}$ si $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$. Par conséquent $\det P_{\mathcal{B}_i \mathcal{B}_j}$ est positif si les déterminants $\det P_{\mathcal{B}_i \mathcal{B}_k}$ et $\det P_{\mathcal{B}_k \mathcal{B}_j}$ le sont. On définit donc une relation d'équivalence dans l'ensemble des bases de \mathbf{R}^n en disant que \mathcal{B}_i et \mathcal{B}_j sont équivalentes si $\det P_{\mathcal{B}_i \mathcal{B}_j} > 0$. Il existe deux classes d'équivalence exactement. Fixer une orientation de \mathbf{R}^n c'est privilégier l'une de ces classes. On dit alors que \mathbf{R}^n est orienté. Les bases qui appartiennent à cette orientation sont dites directes. Les autres sont dites indirectes. On dit qu'une application linéaire $g \in GL_n(\mathbf{R})$ préserve l'orientation si elle envoie les bases directes sur les bases directes et les bases indirectes sur les bases indirectes. Pour que g préserve l'orientation il suffit qu'elle envoie une seule base sur une base de même nature. Il suffit également que $\det g > 0$.

Considérons (u_1, v_1) et (u_2, v_2) deux bases du plan vectoriel euclidien \mathbf{R}^2 et orienté. Elles déterminent la même orientation si et seulement si les sinus $\sin(\widehat{u_1, v_1})$ et $\sin(\widehat{u_2, v_2})$ sont de même signe.

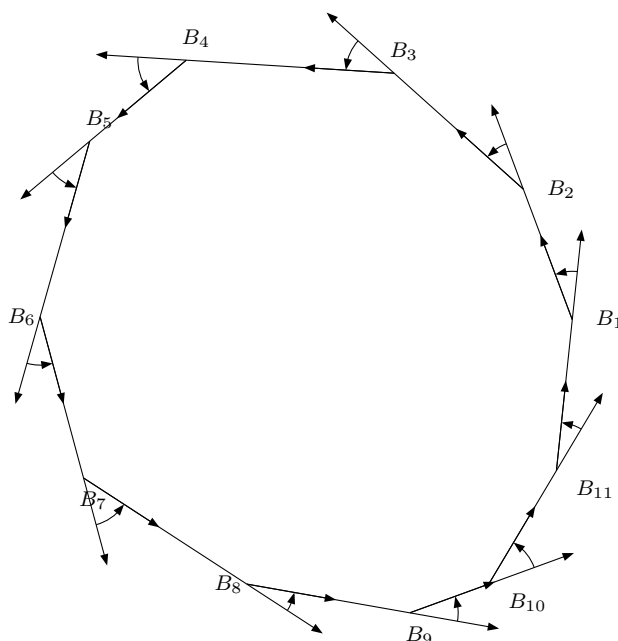
Soit \mathcal{H} un demi-plan bordé par une droite δ et $A, B \in \delta$ et $C, D \in \mathcal{H} \setminus \delta$. Alors $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}), (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}), (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{AB})$ et $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AB})$, sont des bases de même orientation.

Soient B_1, \dots, B_l des points trois à trois non alignés et tels que la ligne polygonale fermée γ formée des segments $[B_i, B_{i+1}], i = 1, \dots, l$ (avec $B_{l+1} = B_1$) soit sans point-double, forme le bord $C \setminus \text{Int}(C)$ d'un polygône convexe. Alors les couples $(\overrightarrow{B_i B_{i+1}}, \overrightarrow{B_i B_j}), i = 1, \dots, l; j \neq i, i+1$ et $(\overrightarrow{B_i B_{i+1}}, \overrightarrow{B_{i+1} B_j}), i = 1, \dots, l; j \neq i, i+1$ sont des bases de même orientation. En particulier il existe $\varepsilon \in \{+, -\}$ et pour $i = 1, \dots, l$ et $j \neq i, i+1$ il existe α_{ij} et $\beta_{ij} \in]0, \pi[$ tels que

$$(\overrightarrow{B_i B_{i+1}}, \overrightarrow{B_i B_j}) = \varepsilon \alpha_{ij}$$

et

$$(\overrightarrow{B_i B_{i+1}}, \overrightarrow{B_{i+1} B_j}) = \varepsilon \beta_{ij}.$$



Ceci est une conséquence immédiate du fait que si $i = 1, \dots, l$ les points $B_j, j \neq i, i+1$ sont tous dans le même demi-plan ouvert bordé par la droite $(B_i B_{i+1})$.

Inversement si B_1, \dots, B_l des points trois à trois non alignés et tels que la ligne polygonale fermée γ formée des segments $[B_i, B_{i+1}], i = 1, \dots, l$ (avec $B_l = B_0$ et $B_{l+1} = B_1$) soit sans point-double et vérifie $(\overrightarrow{B_{i-1}B_i}, \overrightarrow{B_iB_{i+1}}) \in]0, \pi[$ pour tout $i = 1, \dots, l$ alors γ est le bord de son enveloppe convexe. En effet, le bord de l'enveloppe convexe C des B_i est constitué d'une ligne polygonale reliant certains des B_i . La condition angulaire implique que toute droite $(B_j B_k)$ passant par deux points non successifs ne borde pas un demi-plan qui contiendrait tous les B_i . Le segment $[B_j, B_k]$ n'est donc pas dans le bord de C .

17.4. Un domaine d'aire maximale parmi les domaines étoilés bordés par des lignes polygonales à au plus n sommets et de longueurs majorées.

On identifie \mathbf{R}^2 et \mathbf{C} . Une ligne polygonale étoilée (par rapport à l'origine) avec au plus n sommets est caractérisée par $2n$ nombres, $r_1, \dots, r_n \in [0, +\infty)$ et $0 \leq \theta_1 \leq \dots \leq \theta_n \leq 2\pi$ tels que $\theta_{k+1} - \theta_k \leq \pi$ pour tout $k = 1, \dots, n$ (avec pour convention $r_{n+1} = r_1, \theta_{n+1} = \theta_n$). On note (r, θ) ce $2n$ -uplet. Dorénavant on note $E(r, \theta)$ cette ligne polygonale étoilée. Les points A_k d'affixes $z_k = r_k \exp(i\theta_k)$ sont les sommets de $E(r, \theta)$. La ligne polygonale étoilée est la réunion des segments $[A_k, A_{k+1}], k = 1, \dots, n$. La longueur $l(r, \theta)$ de $E(r, \theta)$

est égale à

$$l(r, \theta) = \sum_{k=1}^n |z_{k+1} - z_k|.$$

La ligne $E(r, \theta)$ délimite le compact $K(r, \theta)$ suivant. Le point A d'affixe z appartient à $K(r, \theta)$ s'il existe $k = 1, \dots, n$, tel que A soit dans l'enveloppe convexe du triangle formé de l'origine, de A_k et de A_{k+1} . Ceci signifie qu'il existe $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ tels que $z = \alpha(\beta z_k + (1 - \beta)z_{k+1})$. La surface $s(r, \theta)$ du compact $K(r, \theta)$ est égal à

$$s(r, \theta) = \sum_{k=1}^n r_k r_{k+1} \sin(\theta_{k+1} - \theta_k).$$

Soit $L \geq 0$. On note $P(n, L)$ l'ensemble des $(r, \theta) \in \mathbf{R}^{2n}$ tel que $l(r, \theta) \leq L$. C'est ensemble est compact : il est fermé car c'est l'image réciproque du fermé $[0, L]$ par une application continue. Il est borné car les θ_k sont dans $[0, 2\pi]$ et les r_k sont dans $[0, L]$. En effet sinon on trouve $0 \leq k \leq l \leq n$ tels que $\theta_l - \theta_k \geq \frac{\pi}{2}$ et tels que $\max\{r_k, r_l\} > L$. On vérifie alors à l'aide l'inégalité triangulaire que $l(r, \theta) \geq |z_l - z_k| \geq \max\{r_k, r_l\} > L$.

La fonction $(r, \theta) \in P(n, L) \mapsto s(r, \theta)$ est une fonction continue définie sur un compact de \mathbf{R}^{2n} . Elle atteint donc une valeur maximale $S(n, L)$. Nous allons montrer que $s(r, \theta) = S(n, L)$ si et seulement si la ligne polygonale $E(r, \theta)$ est un polygône convexe régulier à n côtés et de périmètre L .

Si $0 < l(r, \theta) = l' < l$ alors $(\frac{l}{l'}r, \theta) \in P(n, L)$ et $s(\frac{l}{l'}r, \theta) = (\frac{l}{l'})^2 s(r, \theta)$ est strictement plus grand que $s(r, \theta)$. Ceci prouve que la surface ne peut être maximisée parmi les lignes polygonales étoilées de longueur inférieure ou égale à L que par des lignes polygonales de longueur L .

L'enveloppe convexe d'une ligne polygonale étoilée avec au plus n sommets est un polygône convexe à au plus n sommets non alignés (qui sont des sommets de la ligne de départ), qui contient l'origine et qui est bordée par une ligne polygonale de longueur inférieure ou égale à celle de la ligne initiale. Par conséquent les lignes polygonales qui maximisent la surface sont à chercher parmi les lignes polygonales qui bordent des convexes.

17.5. Le polygone convexe régulier à n côtés maximise l'aire.

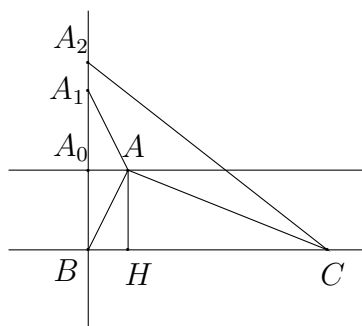
Rappelons quelques résultats classiques sur les triangles. Soit (A, B, C) un triangle qui vont être utiles. On note \hat{A} , \hat{B} et \hat{C} les angles géométriques ($\in [0, \pi]$) aux sommets A , B et C et on note a , b et c les longueur BC , CA et AB . Alors l'aire du triangle est égale à $\frac{1}{2}bc\sin(\hat{A})$ ou d'après la formule de Héron à $\sqrt{(a+b+c)(a+b)(b+c)(c+a)}$. De plus (A, B, C) est inscrit dans un cercle de diamètre $[B, C]$ si et seulement si $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$ c'est à dire si et seulement si (A, B, C) est rectangle en A .

Dans la suite on appelle polygone la partie bornée bordée par une ligne polygonale fermée sans point double. Le périmètre du polygone est la longueur de la ligne polygonale qui le borde.

Considérons un triangle dont le périmètre $p = a + b + c$ est fixé et dont la longueur a d'un côté est fixée. On suppose $0 < a < p$. Ceci signifie que A , B , et C ne sont pas alignés. Alors $c = p - a - b$ et l'aire du triangle est $\sqrt{p(p-a)(p-b)(a+b)}$. Elle est maximale si et seulement si $(p-b)(a+b)$ est maximal c'est à dire si et seulement si $b = c = \frac{p-a}{2}$. Ainsi un triangle non dégénéré de périmètre fixé et dont la longueur a d'un côté est fixé est d'aire maximale si et seulement s'il est isocèle en A .

Nous allons redémontrer ce résultat en utilisant l'observation suivante. Soit B et C deux points distincts du plan et soit δ la droite perpendiculaire à (BC) et qui passe par B . Si $A_1, A_2 \in \delta$ vérifient $BA_1 < BA_2$ si et seulement si $CA_1 < CA_2$.

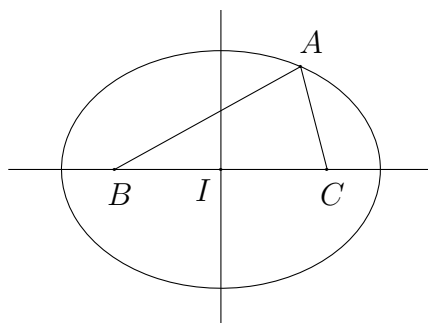
Considérons un triangle (A, B, C) dont le périmètre $p = a + b + c$ est fixé et dont la longueur a d'un côté est fixée. On suppose $0 < a < p$. On note A_0 l'intersection de la perpendiculaire à (BC) et qui passe par B avec la droite parallèle à (BC) et qui passe par A . On note A_1 le symétrique orthogonal de B par rapport à la droite parallèle à (BC) et qui passe par A . Le point A_0 est le milieu de B et A_1 . On a $BA_1 = 2BA_0$. On note H le pied de la hauteur du triangle qui passe par A . Les droites (BA_0) et (HA) sont parallèles. On note A_2 un des deux points de (BA_0) qui est à une distance $b + c$ de C . On a $AA_1 = AB = c$, $BC = a$ et $CA = b$.



Les triangles (A, B, C) , (A_1, B, C) et (A_2, B, C) ont même la base $BC = a$ et leurs hauteurs sont $HA = BA_0$, $BA_1 = 2BA_0$ et BA_2 . Ainsi l'aire de (A_1, B, C) est le double de l'aire de celle de (A, B, C) . D'après l'inégalité triangulaire $CA_1 \leq CA + AA_1 = b + c = CA_2$ et l'inégalité est stricte si et seulement si $A \notin [A_1, C]$. Par conséquent BA_1 et l'aire de (A_1, B, C) sont respectivement inférieures ou égales à BA_2 et à l'aire de (A_2, B, C) et il y a égalité si et seulement si $A \in [A_1, C]$. Or si $A \in [A_1, C]$, puisque A_0 est le milieu de B et A_1 et que (A_0, A_1) est parallèle à (BC) , on déduit de Thalès que A est le milieu de C et A_1 . En appliquant encore Thalès aux droites parallèles (BA_0)

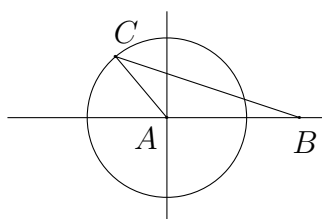
et (HA) on obtient que le pied H de la hauteur du triangle qui passe par A est le milieu de BC . Par conséquent le triangle est isocèle en A et $b = c = \frac{p-a}{2}$. Ainsi un triangle non dégénéré de périmètre fixé et dont la longueur a d'un côté est fixé est d'aire maximale si et seulement s'il est isocèle en A .

Une troisième preuve consiste à dire que si B et C sont fixés, l'ensemble des points A tels que $AB + AC = b + c$ est constant est une ellipse de grand axe la droite BC . Le petit axe est la perpendiculaire à (BC) qui passe par le milieu I de (B, C) .



Dans un repère orthonormé dont l'origine est I et les axes sont les axes de l'ellipse l'équation de cette dernière est de la forme $\alpha x^2 + \beta y^2 = 1$. On maximise l'aire du triangle (A, B, C) en maximisant y^2 c'est à dire en prenant $x = 0$. On reconnaît un triangle isocèle en A .

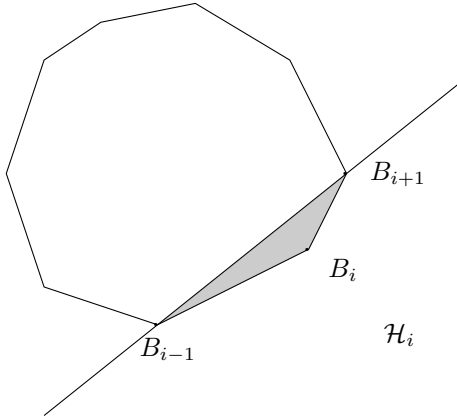
Considérons maintenant un triangle dont les longueurs b et c de deux côtés sont fixées (strictement positives). Son aire est $\frac{1}{2}bc \sin(\hat{A})$. Elle est maximale si et seulement si $\sin(\hat{A}) = 1$ c'est à dire si et seulement si $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$. Ainsi un triangle dont les longueurs b et c de deux côtés sont fixées (strictement positive) est d'aire maximale si et seulement s'il est rectangle en A .



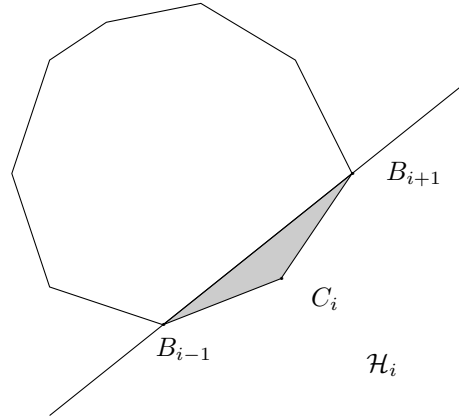
Fixons $L > 0$. Soit $n \geq 3$ et considérons un polygône C à n côtés d'aire maximale parmi les polygones de périmètre au plus L . Nous allons montrer que C est un polygône régulier (tous les côtés sont de même longueur et C est inscrit dans un cercle).

Dans un premier temps montrons que les n côtés du polygône C sont tous de longueur $\frac{L}{n}$. D'après les résultats précédents, ce polygône est nécessairement convexe. Considérons trois sommets successifs B_{i-1} , B_i et B_{i+1} . On

pose $a_i = B_{i-1}B_{i+1}$, $b_i = B_{i+1}B_i$ et $c_i = B_iB_{i-1}$. On note aussi \mathcal{H}_i le demi-plan fermé bordé par $(B_{i-1}B_{i+1})$ et qui contient B_i . L'intersection $\mathcal{H}_i \cap C$ est égale au triangle plein de sommets B_{i-1} , B_i et B_{i+1} . Si $b_i \neq \frac{L}{n}$ alors il existe dans \mathcal{H}_i un triangle (B_{i-1}, C_i, B_{i+1}) isocèle de même périmètre que le triangle (B_{i-1}, B_i, B_{i+1}) , et d'aire strictement plus grande.



le polygône initial est convexe
mais les côtés ne sont pas tous
de même longueur

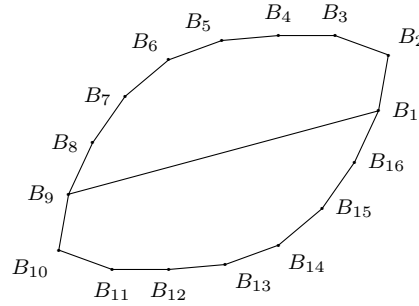


le polygône déformé a le même périmètre que le premier
mais son aire est plus grande car le triangle grisé
a augmenté alors que la partie blanche est invariante

En remplaçant B_i par C_i on obtiendrait alors un polygône d'aire strictement plus grande et de même périmètre. Par contraposée $b_i = c_i$. Ainsi un polygône C à n côtés, de périmètre L et d'aire maximale à des côtés tous d'égale longueur $\frac{L}{n}$.

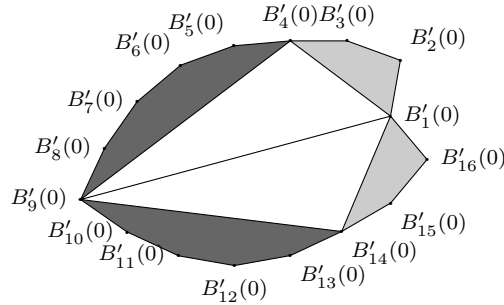
Supposons maintenant que $n = 2p$ et montrons que le polygône C est le polygône régulier à n côtés : il est convexe, inscrit dans un cercle et ses côtés sont de longueur $\frac{L}{n}$. Soit $B_1, \dots, B_p, B_{p+1}, \dots, B_{2p}, B_{2p+1} = B_1$ ses sommets ordonnés. Quitte à décaler les indices de p , on peut supposer que l'enveloppe convexe de B_1, \dots, B_p, B_{p+1} est d'aire supérieure ou égale à celle de $B_{p+1}, \dots, B_p, B_{2p+1}$. On peut même supposer qu'elles sont égales. Sinon on augmenterait strictement l'aire sans modifier le périmètre en remplaçant chaque B_i pour $i = p+1, \dots, p+2$ par le symétrique du point B_{2p+1-i} par rapport à la droite (B_1B_{p+1}) . Il suffit de montrer que B_1, \dots, B_p, B_{p+1} sont sur un cercle de diamètre B_1B_{p+1} . Pour des raisons de symétrie ça sera aussi vrai pour B_{p+1}, \dots, B_{2p} . Ceci revient à montrer que les angles géométriques $\widehat{B_1B_jB_{p+1}}$ sont égaux à $\frac{\pi}{2}$ si $j = 2, \dots, p$. Fixons $j = 2, \dots, p$. Quitte à changer l'orientation du plan on peut supposer que l'angle orienté $\widehat{\overrightarrow{B_jB_1}, \overrightarrow{B_jB_{p+1}}} = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$ appartient à $[0, \pi]$ ($\varepsilon \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$). Raisonnons par contraposée et supposons que B_j ne soit pas sur le cercle de diamètre $[B_1, B_{p+1}]$. Dans ce cas $|\varepsilon| \neq 0$. On note \mathcal{H} le demi plan bordé par la droite (B_1B_{p+1}) et qui contient les points B_1, \dots, B_p, B_{p+1} . Soient δ_1, δ_j et δ_{p+1} des droites d'appui du convexe

C aux points B_1, B_j et B_{p+1} . La droite δ_j est transverse aux droites (B_1B_j) et (B_jB_{p+1}) et les droites δ_1 et δ_{p+1} sont transverses à la droite (B_1B_{p+1}) . Les points B_1, \dots, B_j sont dans le triangle plein T_1 bordé par les droites δ_1, δ_j et (B_1B_j) alors que les points B_j, \dots, B_{p+1} sont dans le triangle plein T_{p+1} bordé par les droites δ_{p+1}, δ_j et (B_jB_{p+1}) . Ces deux triangles sont dans \mathcal{H} , leur intersection est réduite au point B_j et ils ne rencontrent la droite (B_1B_{p+1}) qu'aux points B_1 et B_{p+1} . Si $s \in [0, 1]$ on considère les points $B'_i(s), i = 1, \dots, 2n$ définis de la façon suivante. Si $i = 1, \dots, j$ alors $B'_i(s) = B_i$. Si $i = j, \dots, p+1$ alors $B'_i(s)$ est l'image de B_i par la rotation d'angle $-\varepsilon s$ et de centre B_j . Si $i = p+2, \dots, n$ alors $B'_i(s)$ est le symétrique orthogonal de $B'_{2(p+1)-i}(s)$ par rapport à la droite $(B'_1(s)B'_{p+1}(s))$.

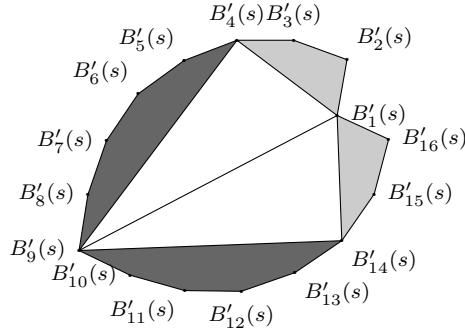


le polygône initial :

il est convexe, ces côtés sont égaux
et il est décomposé en deux parties
de même périmètre et de même aire



le polygône symétrisé avant déformation :
 $s = 0$, l'aire et le périmètre n'ont pas changés
mais il n'est plus nécessairement convexe



le polygone symétrisé après déformation :
 $s > 0$, le périmètre est inchangé mais l'aire augmente
car l'aire des polygones grisés ne changent pas
mais celle des triangles blancs a augmenté
(on ne pas toujours aller jusque $s = 1$
si en $s = 0$ le polygone n'est pas convexe)

On pose $T_1(s) = T_1$ et on note $T_{p+1}(s)$ l'image du triangle T_{p+1} par la rotation d'angle $-\varepsilon s$ et de centre B_j . Les triangles $T_1(s)$ et $T_{p+1}(s)$ contiennent respectivement les points $B'_1(s), \dots, B'_{p+1}(s)$ et $B'_{p+1}(s), \dots, B'_{2p}(s)$. De plus si s est petit leur intersection est réduite au point $B'_j(s)$ et ils sont contenus dans le même demi-plan bordé par la droite $(B'_1(s)B'_{p+1}(s))$. Aussi la ligne polygonale γ_s est sans point double et qu'elle est de longueur L . Elle borde un polygone C_s symétrique par rapport à la droite $(B'_1(s)B'_{p+1}(s))$. Ce polygone qui n'est pas nécessairement convexe se décompose en six parties. La somme des aires de ces six parties est égale à l'aire du polygone. Les deux parties bordées par les lignes polygonales fermées de sommets successifs $(B'_1(s), \dots, B'_j(s))$ et $(B'_j(s), \dots, B'_{p+1}(s))$ ainsi que les symétriques de ces parties ont des aires indépendantes de $s \in [0, 1]$. Les deux parties qui sont le triangle $(B'_1(s), B'_j(s), B'_{p+1}(s))$ et son symétrique ont une aire égale à $\frac{1}{2}B_1B_j \cdot B_jB_{p+1} \cdot \sin(\frac{\pi}{2} + (1-s)\varepsilon)$. On en déduit que si $s > 0$ petit les points $B'_i(s)$ forment une ligne polygonale qui borde un polygone d'aire strictement plus grande que celle du polygone C . Par contraposée on conclut que B_j et sur le cercle de diamètre $[B_1, B_{p+1}]$.

Supposons que n soit impair. On note L' et A' le périmètre et l'aire du polygone régulier à $n' = 2n$ côtés dont les sommets d'indice pair bordent un polygone régulier à n côtés et de périmètre L . On note A l'aire de ce polygone régulier à n côtés. Soit C un polygone à n côtés d'aire maximale parmi les polygones de périmètre au plus L . C'est un polygone convexe. Ces côtés sont de longueur $\frac{L}{n}$. On note $A(C)$ son aire. On a $A(C) \geq A$. On note B_1, \dots, B_n ses sommets successifs. On considère le polygone C' à $n' = 2n$ côtés de longueurs $\frac{L'}{n'}$ dont les sommets $B'_1, \dots, B'_{n'}$ sont définis de la façon suivante. Si $i = 1, \dots, n$ $B'_{2i} = B_i$, $B'_{2i+1} \notin C$ et $B'_{2i}B'_{2i+1} = B'_{2i+1}B'_{2i+2} = \frac{L'}{n'}$.

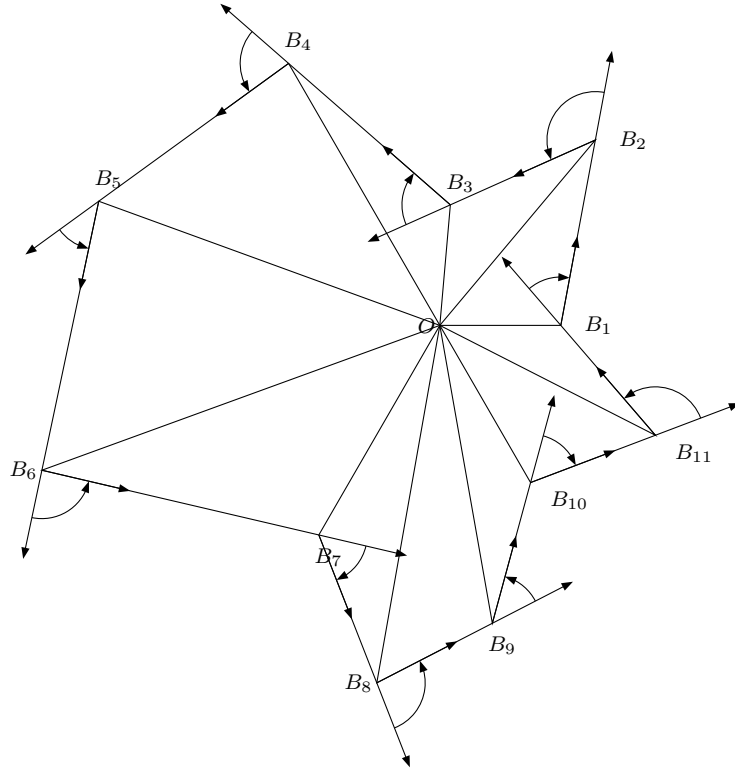
L'aire du polygône C' est $A(C) + (A' - A)$. Elle est donc supérieure ou égale à A' . Mais si C n'est pas un polygône régulier à n côtés alors C' n'est pas un polygône régulier à $n' = 2n$ côtés et son aire $A(C) + (A' - A)$ est strictement inférieure à A' . Par contradiction le polygône C' est régulier.

17.6. Voisinage d'un polygône convexe du plan.

Soit γ une ligne polygonale de sommets B_1, \dots, B_n bordant un convexe C du plan. On note L la longueur de γ et A l'aire de C . On choisit les B_k de telle sorte que B_{k-1} , B_i et B_{k+1} ne soient jamais alignés. On fixe aussi l'orientation de telle sorte que l'angle orienté $(\overrightarrow{B_1 B_2}, \overrightarrow{B_2 B_3})$ soit strictement positif. Avec ce choix tous les angles $(\overrightarrow{B_{k-1} B_k}, \overrightarrow{B_k B_{k+1}})$ sont strictement positifs (avec $B_0 = B_n$ et $B_{n+1} = B_1$).

Démontrons

$$\sum_{k=1}^n (\overrightarrow{B_{k-1} B_k}, \overrightarrow{B_k B_{k+1}}) = 2\pi.$$



On fait une translation pour que l'origine soit dans C . Le convexe est étoilé par rapport à l'origine. On va démontrer le résultat pour les convexes étoilés bordés par une ligne polygonale. On considère les affixes $z_k = r_k \exp(i\theta_k)$ des points B_k . On fait une rotation pour que $\theta_1 = 0$. On peut supposer que $0 =$

$\theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n < 2\pi$ (il faut peut-être changer l'origine pour qu'elle ne soit pas dans l'alignement de deux sommets). On pose $\alpha_k = \widehat{(\overrightarrow{B_{k-1}B_k}, \overrightarrow{B_kB_{k+1}})}$. Si $t \in [0, 1]$ on pose

$$z_k(t) = ((1-t)r_k + t) \exp(i(\theta_k(1-t) + \frac{2\pi(k-1)}{n}t)) \text{ si } k = 1, \dots, n$$

et on pose $z_0(t) = z_n(t)$ et $z_{n+1}(t) = z_1(t)$. On note $B_k(t)$ le point d'affixe $z_k(t)$. Puisque

$$0 = \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n < 2\pi$$

et que

$$0 = \frac{2\pi(0)}{n}t < \frac{2\pi(1)}{n}t < \dots < \frac{2\pi(n-1)}{n}t < 2\pi$$

pour tout $t \in [0, 1]$ on

$$0 = \theta_1(1-t) + \frac{2\pi(0)}{n}t < \theta_2(1-t) + \frac{2\pi(1)}{n}t < \dots < \theta_n(1-t) + \frac{2\pi(n-1)}{n}t < 2\pi.$$

Ainsi, par construction les $B_k(t), k = 1, \dots, n$ sont tous différents. On pose

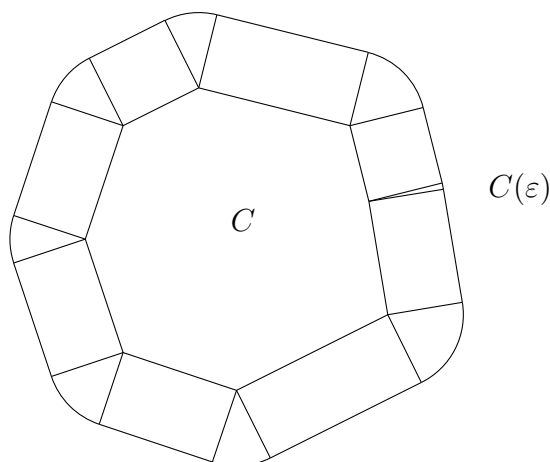
$$\alpha_k(t) = \widehat{(\overrightarrow{B_{k-1}(t)B_k(t)}, \overrightarrow{B_k(t)B_{k+1}(t)})}.$$

La relation de Chasles implique que pour tout t

$$\begin{aligned} \Theta(t) &= \sum_{k=1}^n \widehat{(\overrightarrow{B_{k-1}(t)B_k(t)}, \overrightarrow{B_k(t)B_{k+1}(t)})} \\ &= \widehat{(\overrightarrow{B_0(t)B_1(t)}, \overrightarrow{B_n(t)B_0(t)})} \\ &= 0 \text{ modulo } 2\pi. \end{aligned}$$

Or les angles $\widehat{(\overrightarrow{B_{k-1}(t)B_k(t)}, \overrightarrow{B_k(t)B_{k+1}(t)})}$ dépendent continument de t . Par conséquent la fonction Θ qui est continue et à valeurs dans $2\pi\mathbf{Z}$ est constante. Or pour $t = 1$ les $B_k(1)$ bordent le polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité : $\Theta(1) = 2\pi$. Par conséquent $\Theta(0) = 2\pi$ également.

Soit $\varepsilon > 0$. On note $C(\varepsilon)$ l'ensemble formé des points du plan à une distance inférieure ou égale à ε de C . C'est le ε -tube autour de C .



L'ensemble $C(\varepsilon)$ est la réunion de C (d'aire A), de rectangles extérieurs R_k à C dont l'un des côté est $[B_{k-1}, B_k]$ et un côté orthogonal est de longueur ε (d'aire $|\overrightarrow{B_{k-1}B_k}| \varepsilon$ et de secteurs de rayon ε et d'ouverture $\widehat{(\overrightarrow{B_{k-1}B_k}, \overrightarrow{B_kB_{k+1}})}$ au sommets B_k (d'aire $(\frac{1}{2} \widehat{(\overrightarrow{B_{k-1}B_k}, \overrightarrow{B_kB_{k+1}})}) \varepsilon^2$). L'intersection de deux quelconques de ces parties est un segment ou le vide. Par conséquent l'aire $A(\varepsilon)$ de $C(\varepsilon)$ est la somme des aires de ces parties : $A(\varepsilon) = A + L\varepsilon + \pi\varepsilon^2$.

17.7. Inégalité isopérimétrique pour les courbes rectifiables du plan.

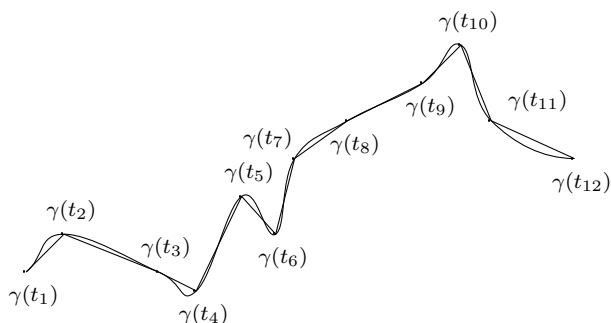
Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$ une *courbe* du plan. C'est une application continue (donc uniformément continue) du segment $[0, 1]$ dans \mathbf{R}^2 . Si $n \geq 1$ et $t_1 = 0 \leq \dots \leq t_{n+1} = 1$ alors on note $\gamma(t_i)$ la courbe polygonale fermée de sommets les $\gamma(t_i), i = 1, \dots, n$. La continuité uniforme implique que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que si $n \geq 1$ et $t_1 = 0 \leq \dots \leq t_{n+1} = 1$ et $|t_{i+1} - t_i| \leq \eta$ pour $i = 1, \dots, n$ alors $\|\gamma(t) - \gamma(t_i)\| \leq \varepsilon$ pour tout $t \in [t_i, t_{i+1}]$.

La courbe γ est dite rectifiable s'il existe $K > 0$ tel que pour $n \geq 1$ et pour tous les $t_1 = 0 \leq \dots \leq t_{n+1} = 1$ on a

$$\sum_{i=1}^n \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| \leq K.$$

On appelle alors longueur de γ le nombre

$$\text{longueur}(\gamma) = \sup_{\substack{n \geq 1 \\ t_1=0 \leq \dots \leq t_{n+1}=1}} \sum_{i=1}^n \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|.$$



Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$ une courbe C^1 . Alors elle est rectifiable et la longueur de γ est donnée par la formule intégrale

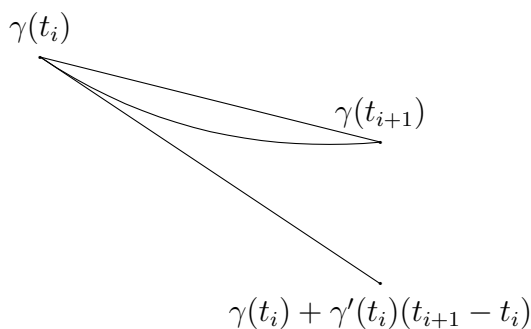
$$\text{longueur}(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt.$$

En effet si $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que si $n \geq 1$ et $t_1 = 0 \leq \dots \leq t_{n+1} = 1$ et $|t_{i+1} - t_i| \leq \eta$ pour $i = 1, \dots, n$ alors pour tout $i = 1, \dots, n$ et pour tout $t \in [t_i, t_{i+1}]$ on a $\|\gamma'(t_i) - \gamma'(t)\| \leq \varepsilon$. Par conséquent on a

$$\begin{aligned} \left| \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| - \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(t) dt \right\| \right| &= \left| \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(t) dt \right\| - \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(t_i) dt \right\| \right| \\ &= \left| \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(t) dt \right\| - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\gamma'(t_i)\| dt \right| \\ &\leq \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\gamma'(t) - \gamma'(t_i)) dt \right\| \\ &\leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\gamma'(t) - \gamma'(t_i)\| dt \\ &\leq \varepsilon(t_{i+1} - t_i) \end{aligned}$$

et

$$\left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\gamma'(t)\| dt - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\gamma'(t_i)\| dt \right| \leq \varepsilon(t_{i+1} - t_i).$$



tangente, corde et courbe entre γ_{t_i} et $\gamma_{t_{i+1}}$

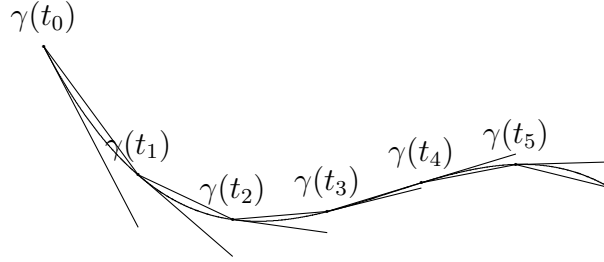
Ceci entraîne que

$$\left| \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\gamma'(t)\| dt \right| \leq 2\varepsilon(t_{i+1} - t_i).$$

En sommant sur i on obtient que

$$\left| \sum_{i=1}^n \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| - \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt \right| \leq 2\varepsilon.$$

En passant à la limite quand ε tend vers 0 on obtient l'égalité voulue.



courbe C^1 approximée par ses tangentes et par une ligne polygonale

On appelle *lacet* une courbe fermée : $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Soit $L > 0$. On va démontrer que parmi toutes les lacets rectifiables de longueur inférieure ou égale à L le cercle de périmètre L maximise l'aire du compact qu'il borde.

Le résultat sur les lignes polygonales assurent que si on note l_n et a_n le périmètre et l'aire du polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle de rayon r alors les suites l_n et a_n sont croissantes et $\lim_n a_n = \pi r^2$ alors que $\lim_n l_n = 2\pi r$. De plus si L et A sont le périmètres d'un polygone à n côtés alors $\frac{A}{L^2} \leq \frac{a_n}{l_n^2} \leq \frac{a_{n+1}}{l_{n+1}^2}$. Puisque $\frac{a_n}{l_n^2}$ tend vers $\frac{1}{4\pi}$ on en déduit que $\frac{A}{L^2} \leq \frac{a_n}{l_n^2} \leq \frac{a_{n+1}}{l_{n+1}^2} \leq \frac{1}{4\pi}$.

Soit γ_0 un lacet rectifiable de longueur $L_0 \leq L$. On note A_0 l'aire du domaine C_0 qu'il borde. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la propriété de continuité uniforme il existe $n \geq 1$ et $t_1 = 0 \leq \dots \leq t_{n+1} = 1$ tel que la ligne polygonale fermée γ_1 de sommets $B_1 = \gamma_0(t_1), \dots, B_n = \gamma_0(t_n)$ vérifie les propriétés suivantes :

- la longueur L_1 de γ_1 est inférieure ou égale à L_0 ;
- Si $t \in [0, 1]$ alors $\|\gamma_1(t) - \gamma_0(t)\| \leq \varepsilon$.

Considérons γ_2 la ligne polygonale bordant l'enveloppe convexe C_2 des B_i . Soit L_2 sa longueur et A_2 son aire. La longueur L_2 est inférieure ou égale à L_1 donc aussi inférieure ou égale à L_0 : $L_2 \leq L_0$. Tout point de C_0 est à une distance inférieure ou égale à ε d'un point de C_2 c'est à dire est inclus dans le tube $C_2(\varepsilon)$. On en déduit que $A_0 \leq A_2 + L\varepsilon + \pi\varepsilon^2$ puis en divisant par L_0^2 et L_2^2 on obtient

$$\frac{A_0}{L_0^2} \leq \frac{A_2 + L\varepsilon + \pi\varepsilon^2}{L_2^2} \leq \frac{1}{4\pi} + \frac{1}{L_2}\varepsilon + \frac{1}{L_2^2}\pi\varepsilon^2.$$

Puisque $C_0 \subset C_2(\varepsilon)$ on en déduit que L_2 est supérieur à $D_0 - 2\varepsilon$ ou $D_0 > 0$ désigne le diamètre de C_0 . Ainsi

$$\frac{A_0}{L_0^2} \leq \frac{1}{4\pi} + \frac{1}{D_0 - 2\varepsilon}\varepsilon + \frac{1}{(D_0 - 2\varepsilon)^2}\pi\varepsilon^2.$$

Par passage à la limite on obtient

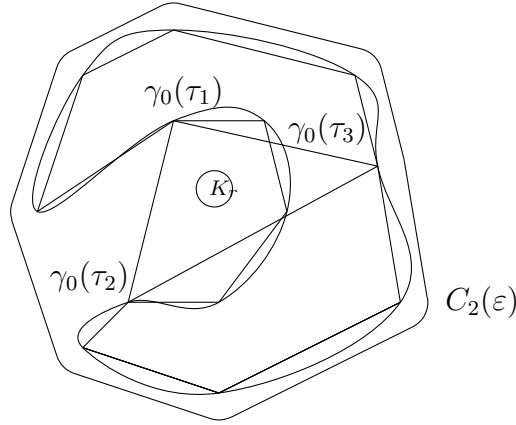
$$\frac{A_0}{L_0^2} \leq \frac{1}{4\pi}$$

et ceci signifie que l'aire bordée par γ est inférieure ou égale à l'aire d'un disque de même périmètre L_0 et à plus forte raison à celle d'un disque de périmètre L .

Montrons que si C_0 n'est pas convexe alors on a l'inégalité stricte

$$\frac{A_0}{L_0^2} < \frac{1}{4\pi}.$$

En effet si C_0 n'est pas convexe il existe $\tau_1 < \tau_2$ tel que $] \gamma_0(\tau_1), \gamma_0(\tau_2)[\cap C$ est vide. Soit τ_3 tel que $\gamma_0(\tau_1), \gamma_0(\tau_2)$ et $\gamma_0(\tau_3)$ ne soient pas alignés (τ_3 existe car γ_0 n'est pas sur une droite). Il existe $r > 0$ et un disque K_r de rayon r à l'intérieur du triangle plein défini par $\gamma_0(\tau_1), \gamma_0(\tau_2)$ et $\gamma_0(\tau_3)$ et à une distance supérieure à r de C_0 et du bord du triangle.



Si $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit le convexe $C_2(\varepsilon)$ contient K_r . On en déduit que

$$\frac{A_0 + \pi r^2}{L_0^2} \leq \frac{A_2 + L_2\varepsilon + \pi\varepsilon^2}{L_2^2} \leq \frac{1}{4\pi} + \frac{1}{L_2}\varepsilon + \frac{1}{L_2^2}\pi\varepsilon^2$$

et donc

$$\frac{A_0 + \pi r^2}{L_0^2} \leq \frac{1}{4\pi} + \frac{1}{D_0 - 2\varepsilon}\varepsilon + \frac{1}{(D_0 - 2\varepsilon)^2}\pi\varepsilon^2.$$

Par passage à la limite on obtient

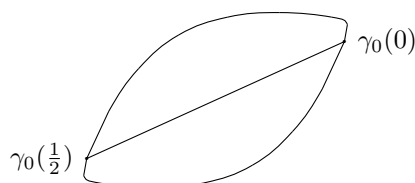
$$\frac{A_0 + \pi r^2}{L_0^2} \leq \frac{1}{4\pi}$$

et ceci implique que l'aire bordée par γ_0 est strictement inférieure à l'aire d'un disque de même périmètre L_0 et à plus forte raison à celle d'un disque de périmètre L .

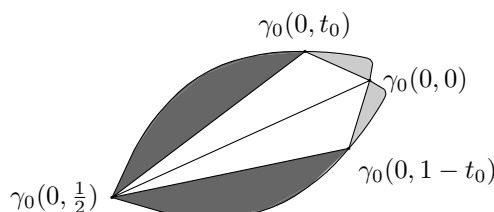
Supposons C_0 convexe. Montrons que si C_0 n'est pas un disque alors l'aire n'est pas maximale. On suit essentiellement la démonstration donnée dans la situation polygonale. Soit T telle que $\gamma_0([0, T])$ et $\gamma_0([T, 1])$ divisent γ_0 en deux arcs de même longueur $\frac{L_0}{2}$. Quitte à reparamétriser on peut supposer que $T = \frac{1}{2}$. Si les aires des enveloppes convexes C_0^0 de $\gamma_0([0, \frac{1}{2}])$ et C_0^1 de $\gamma_0([\frac{1}{2}, 1])$ ne sont pas égales, par exemple si l'aire de C_0^0 est strictement plus grande que celle de C_0^1 alors γ_0 n'est pas un cercle et on augmente strictement l'aire sans augmenter le périmètre en remplaçant γ_0 par le lacet γ'_0 défini en prenant pour $\gamma'_0(t)$ $\gamma_0(t)$ si $t \in [0, \frac{1}{2}]$ et pour $\gamma'_0(t)$ le symétrique de $\gamma_0(1 - t)$ par rapport à la droite $(\gamma_0(0), \gamma_0(\frac{1}{2}))$ si $t \in [\frac{1}{2}, 1]$. Si C_0 n'est pas un disque il existe $t_0 \neq 0, \frac{1}{2}, 1$ tel que l'angle $\widehat{(\gamma_0(t_0)\gamma_0(0), \gamma_0(t_0)\gamma_0(T))}$ ne soit pas droit. Quitte à changer l'orientation de γ_0 on peut supposer que $t_0 \in]0, \frac{1}{2}[$ et quitte à changer l'orientation du plan on peut supposer que cet angle est compris strictement entre 0 et π . On écrit cet angle $\frac{\pi}{2} + \varepsilon$ avec $|\varepsilon| \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

On note \mathcal{H} le demi plan bordé par la droite $(\gamma_0(0)\gamma_0(\frac{1}{2}))$ et qui contient l'arc $\gamma_0([0, \frac{1}{2}])$. Soient δ_0, δ_{t_0} et $\delta_{\frac{1}{2}}$ des droites d'appui du convexe C aux points $\gamma_0(0), \gamma_0(t_0)$ et $\gamma_0(\frac{1}{2})$. La droite δ_{t_0} est transverse aux droites $(\gamma_0(0)\gamma_0(t_0))$ et $(\gamma_0(t_0)\gamma_0(\frac{1}{2}))$ et les droites δ_0 et $\delta_{\frac{1}{2}}$ sont transverses à la droite $(\gamma_0(0)\gamma_0(\frac{1}{2}))$. L'arc $\gamma_0([0, t_0])$ est dans le triangle plein T_0 bordé par les droites δ_0, δ_{t_0} et $(\gamma_0(0)\gamma_0(t_0))$ alors que l'arc $\gamma_0([t_0, \frac{1}{2}])$ est dans le triangle plein $T_{\frac{1}{2}}$ bordé par les droites $\delta_{t_0}, \delta_{\frac{1}{2}}$ et $(\gamma_0(t_0)\gamma_0(\frac{1}{2}))$. Ces deux triangles sont dans \mathcal{H} , leur intersection est réduite au point $\gamma_0(t_0)$ et ils ne rencontrent la droite $(\gamma_0(0)\gamma_0(\frac{1}{2}))$ qu'aux points $(\gamma_0(0)$ et $\gamma_0(\frac{1}{2}))$. On peut donc faire tourner les points du second triangle par une rotation de centre $\gamma_0(t_0)$ sans rencontrer le premier triangle à condition que l'angle de rotation soit petit. C'est pourquoi par une transformation analogue à celle réalisée dans le cas des lignes polygonales on transforme C_0 en $C_0(s), s \in]0, 1[$ petit, de même périmètre mais d'aire strictement plus grande. Décrivons cette transformation en passant aux affixes et en considérant γ_0 comme une application de $[0, 1]$ dans \mathbf{C} . Soit $s \in [0, 1]$ fixé. Si $t \in [0, t_0]$ on pose $\gamma_0(s, t) = \gamma_0(t)$. Si $t \in [t_0, \frac{1}{2}]$ on pose

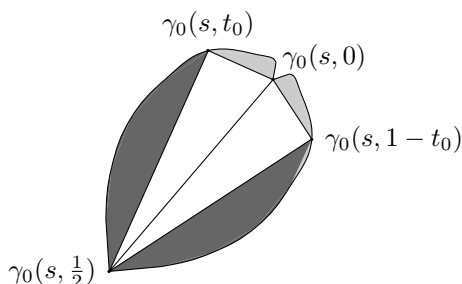
$$\gamma_0(s, t) = \gamma_0(t_0) + \exp(-is\varepsilon)(\gamma_0(t) - \gamma_0(t_0)).$$



le convexe initial :
il est décomposé en deux parties
de même périmètre et de même aire



le domaine symétrisé avant déformation :
 $s = 0$, l'aire et le périmètre n'ont pas changés
mais il n'est plus nécessairement convexe



le domaine symétrisé après déformation :
 $s > 0$, le périmètre est inchangé mais l'aire augmente
car l'aire des zones grisées ne changent pas
mais celle des triangles blancs a augmenté
(on ne pas toujours aller jusque $s = 1$
si en $s = 0$ le domaine n'est pas convexe)

On fait tourner la portion de courbe $\gamma([t_0, \frac{1}{2}])$ d'un angle $-s\varepsilon$ autour de $\gamma_0(t_0)$. Enfin si $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ on désigne par $\gamma_0(s, t)$ le symétrique orthogonal de $\gamma_0(s, 1-t)$ par rapport à la droite $(\gamma_0(s, 0)\gamma_0(s, \frac{1}{2}))$. Si s est petit alors la courbe $\gamma_0(s)$ est sans point double et les domaines C_0 et $C_0(s)$ ont même périmètre. En revanche la différence des aires entre $C_0(s)$ et C_0 est égale au double de la différence des aires des triangles $(\gamma_0(s, 0), \gamma_0(s, t_0), \gamma_0(s, \frac{1}{2}))$ et $(\gamma_0(0), \gamma_0(t_0), \gamma_0(\frac{1}{2}))$ c'est à dire à

$$|\gamma_0(0) - \gamma_0(t_0)| \cdot |\gamma_0(t_0) - \gamma_0(\frac{1}{2})| \cdot \left(\sin(\frac{\pi}{2} + (1-t)\varepsilon) - \sin(\frac{\pi}{2} + \varepsilon) \right)$$

qui est strictement positif dès que $s \in]0, 1]$ et $|\varepsilon| \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

18. Interprétation des moyennes arithmétiques, géométriques, harmoniques, quadratiques.

Soient a_1, \dots, a_n des réels affectés des masses $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ avec $\lambda_1 + \dots + \lambda_n \neq 0$.

La moyenne arithmétique des (a_i, λ_i) est le barycentre

$$\bar{a} = \frac{1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} (\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n).$$

C'est le centre de gravité du système formé de masses ponctuelles λ_i placées aux points a_i . Considérons un déplacement qui suit l'évolution suivante. On suppose que pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, la vitesse de déplacement moyen pendant la durée λ_i est a_i . Alors la moyenne arithmétique \bar{a} est la vitesse de déplacement moyen pendant la durée $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$.

La moyenne harmonique des (a_i, λ_i) est le nombre

$$\bar{a} = \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}{\frac{\lambda_1}{a_1} + \dots + \frac{\lambda_n}{a_n}}.$$

Le nombre $\frac{1}{\bar{a}}$ est la moyenne arithmétique des $(\frac{1}{a_i}, \lambda_i)$. Considérons un déplacement qui suit l'évolution suivante. On suppose que pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, on parcourt la distance λ_i à la vitesse moyenne a_i . Alors la moyenne harmonique \bar{a} est la vitesse de déplacement moyen après avoir parcouru la distance $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$.

Supposons les a_i positifs. La moyenne géométrique des (a_i, λ_i) est le nombre

$$\bar{a} = (a_1^{\lambda_1} \times \dots \times a_n^{\lambda_n})^{\frac{1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}}.$$

Posons $a_i = 1 + \tau_i$ et $\bar{a} = 1 + \bar{\tau}$. Considérons une grandeur K_t qui suit l'évolution suivante. Au temps $t_0 = 0$ elle vaut K_0 et ensuite, pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, entre t_{i-1} et $t_i = \lambda_1 + \dots + \lambda_i$ son taux de croissance moyen par unité de temps est τ_i . Alors sur l'intervalle $[0, t_n]$ son taux de croissance moyen par unité de temps est $\bar{\tau}$ et au temps t_n elle vaut

$$K_{t_n} = K_0 \prod_{i=1}^n a_i^{\lambda_i} = K_0 \prod_{i=1}^n (1 + \tau_i)^{\lambda_i} = K_0 (1 + \bar{\tau})^{t_n} = K_0 \bar{a}^{t_n}.$$

Annexe

19. Les applications qui conservent la distance euclidiennes sont des isométries affines.

On rappelle qu'une application g d'un espace vectoriel euclidien E dans lui-même qui conserve le produit scalaire est un isomorphisme. En effet la conservation du produit scalaire implique que l'image par g d'une base orthonormale $b = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale $b' = (e'_1, \dots, e'_n)$: pour chaque i on a $e'_i = g(e_i)$. Soit $u \in E$. Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ tel que $u = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$. On a, pour chaque i , $\lambda_i = \langle u, e_i \rangle$. Par conséquent $\lambda_i = \langle g(u), g(e_i) \rangle = \langle g(u), e'_i \rangle$ pour chaque i et donc $g(u) = \lambda_1 e'_1 + \dots + \lambda_n e'_n$. Ainsi g est linéaire et la matrice de g par rapport aux bases b et b' est Id . Ainsi g est bien un automorphisme linéaire.

On va prouver que si $(\mathcal{E}, \langle, \rangle)$ est un espace affine euclidien et f une application de \mathcal{E} dans lui-même qui conserve la distance euclidienne (si $x, y \in \mathcal{E}$ alors $\|\overrightarrow{xy}\| = \|\overrightarrow{f(x)f(y)}\|$) alors f est un automorphisme affine.

Soit $o \in \mathcal{E}$. On note τ la translation de vecteur $\overrightarrow{f(o)o}$. On pose $g = \tau \circ f$. Pour montrer que f est un automorphisme affine il suffit de montrer que g est un automorphisme affine. Or, d'une part, g a un point fixe, o , d'autre part g conserve la distance euclidienne puisque c'est la composée de deux applications qui conservent la distance euclidienne. Quitte à vectorialiser \mathcal{E} en prenant comme origine o on est ramené à montrer qu'une application g d'un espace vectoriel euclidien (E, \langle, \rangle) dans lui-même qui conserve la distance euclidienne et qui fixe l'origine est un automorphisme linéaire.

Considérons un tel g . Il suffit de montrer que g conserve le produit scalaire. Puisque g fixe l'origine et conserve la distance euclidienne on a pour tout $u \in E$, $\|u\| = \|g(u)\|$. De plus si $u, v \in E$ la distance entre u et v , $\|u - v\|$ est égale à la distance entre $g(u)$ et $g(v)$, $\|g(u) - g(v)\|$: $\|u - v\| = \|g(u) - g(v)\|$. En élevant au carré cette égalité on obtient

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u, v \rangle = \|g(u)\|^2 + \|g(v)\|^2 - 2\langle g(u), g(v) \rangle.$$

En utilisant alors les égalités $\|u\| = \|g(u)\|$ et $\|v\| = \|g(v)\|$ on obtient la conservation du produit scalaire : $\langle u, v \rangle = \langle g(u), g(v) \rangle$.

20. Théorème de séparation de Jordan pour les lacets polygonaux.

Soit γ une ligne polygonale formée des segments $[A_i, A_{i+1}]$, $i = 1, \dots, n$. Montrons que si γ est un lacet polygonal sans point double alors $\mathbf{R}^2 \setminus \gamma$ a deux composantes connexes et l'une d'elles exactement est bornée. De plus γ est le bord de chacune de ces deux composantes.

Montrons d'abord que $\mathbf{R}^2 \setminus \gamma$ a au plus deux composantes connexes. On admet que pour tout $x \in \gamma$ il existe un disque ouvert D_x centré en x tel que que $D_x \setminus \gamma$ soit la réunion disjointe de deux secteurs ouverts disjoints notés $S_{x,1}$ et $S_{x,2}$. Il suffit de prendre un disque de rayon strictement inférieur aux distances de x aux segments $[A_i, A_{i+1}]$ qui ne le contiennent pas. Ceci signifie en particulier que pour tout $x \in \gamma$, $D_x \setminus \gamma$ rencontre au plus deux composantes connexes de $\mathbf{R}^2 \setminus \gamma$. Ces composantes connexes peuvent dépendre du point x et on ne peut pas conclure encore que $\mathbf{R}^2 \setminus \gamma$ a au plus deux composantes connexes. Soit C une composante connexe de $\mathbf{R}^2 \setminus \gamma$. On pose $\gamma_C = \gamma \cap \overline{C}$. C'est un sous-ensemble fermé de γ . Puisque \mathbf{R}^2 est connexe, γ_C est non vide. De plus si $x \in \gamma$ alors $D_x \cap C$ contient au moins l'un des secteurs $S_{x,1}$ ou $S_{x,2}$ (peut-être les deux). Par conséquent tout point de $\gamma \cap D_x$ est dans γ_C . Ceci prouve que γ_C est un sous-ensemble non vide de γ , fermé et ouvert dans γ . C'est donc γ . Fixons un point x_0 de γ . On vient de démontrer que x_0 est dans l'adhérence de toutes les composantes connexes de $\mathbf{R}^2 \setminus \gamma$. Mais d'après la description de $D_{x_0} \setminus \gamma$ il existe au plus deux composantes connexes de $\mathbf{R}^2 \setminus \gamma$ qui rencontrent D_{x_0} . Par conséquent "toutes" est majoré par 2 et $\mathbf{R}^2 \setminus \gamma$ a au plus deux composantes connexes. On a aussi montré que γ est le bord de chaque composante connexe de $\mathbf{R}^2 \setminus \gamma$.

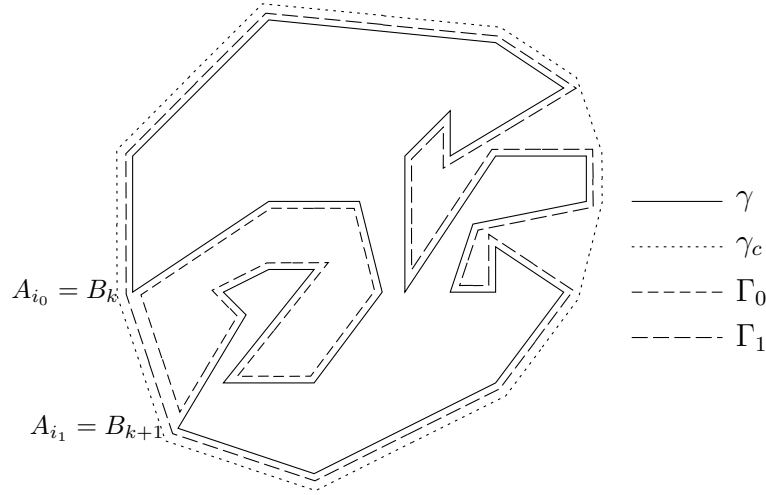
Montrons maintenant que $\mathbf{R}^2 \setminus \gamma$ possède exactement deux composantes connexes, une bornée et l'autre non bornée.

Si γ est une ligne polygonale qui borde un polygône convexe C alors on a déjà montré que $\mathbf{R}^2 \setminus \gamma$ a au moins deux composantes connexes. L'une d'elles, l'intérieur de C est relativement compacte et bordée par γ . D'après ce qui précède les composantes connexes sont au plus 2. Elles sont donc exactement deux et l'une est bornée et l'autre non bornée.

Considérons le cas général. Nous faisons une récurrence sur le nombre de sommets. Les cas $n = 0, 1$ et 2 sont vides. Le cas $n = 3$ est celui du triangle. C'est une situation convexe déjà traitée.

Soit $n \geq 4$ et supposons avoir prouvé le résultat jusqu'au rang $n - 1$. On pose $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$. Soit C_c l'enveloppe convexe des A_i et soit γ_c la ligne polygonale bordant C_c . La ligne γ_c a ses sommets (éventuellement alignés) dans \mathcal{A} . On ordonne $\gamma_c \cap \mathcal{A}$ en B_1, \dots, B_l en fonction de l'ordre de parcours. Si $\gamma_c = \gamma$ c'est la situation convexe déjà résolue. Considérons le cas $\gamma_c \neq \gamma$. Dans

ce cas l'un des segments $[B_k, B_{k+1}]$ n'est pas dans $\gamma :]B_k, B_{k+1}[\cap \gamma = \emptyset$. Soit i_0 et i_1 tels que $A_{i_0} = B_k$ et $A_{i_1} = B_{k+1}$. On coupe γ en deux lignes polygonales γ_0 et γ_1 , disjointes, sans point double et d'extrémités $A_{i_0} = B_k$ et $A_{i_1} = B_{k+1}$. On ferme les γ_i en Γ_i en rajoutant le segment $[A_{i_0}, A_{i_1}] = [B_k, B_{k+1}]$. Les courbes Γ_i n'ont pas de point double car $\gamma_i \cap [A_{i_0}, A_{i_1}] = \{A_{i_0}, A_{i_1}\}$. Elles ont strictement moins de sommets que γ . On note C_i la composante connexe bornée de $\mathbf{R}^2 \setminus \Gamma_i$ et C_i^∞ la composante non bornée. Elles sont bordées par Γ_i .



La courbe γ_1 est connexe et elle est incluse dans la réunion de C_0 et de C_0^∞ qui sont des connexes disjoints. Elle est donc dans l'un ou dans l'autre. Supposons que $\gamma_1 \subset C_0$. Alors C_0^∞ est un ouvert connexe disjoint de Γ_1 (il ne rencontre ni γ_1 ni $[A_{i_0}, A_{i_1}]$). L'ensemble connexe C_0^∞ est donc inclus dans la réunion des deux ouverts disjoints C_1 et C_1^∞ . Il est dans l'un ou dans l'autre. S'il contient un point de C_1 qui a pour frontière Γ_1 il est nécessairement inclus dans C_1 . C'est impossible car C_0^∞ est non borné et C_1 est borné. Par conséquent si $\gamma_1 \subset C_0$ alors $C_1 \subset C_0$. Supposons maintenant que $\gamma_1 \subset C_0^\infty$. Alors C_0 est un ouvert connexe disjoint de Γ_1 (il ne rencontre ni γ_1 ni $[A_{i_0}, A_{i_1}]$). Il est donc inclus dans la réunion des deux ouverts disjoints C_1 et C_1^∞ . Or il contient un point de C_1 . En effet puisque les ouverts C_0 et C_1 sont dans le même demi-plan bordé par (A_{i_0}, A_{i_1}) et que $[A_{i_0}, A_{i_1}] = \Gamma_0 \cap \Gamma_1$ fait partie du bord de C_0 et de celui de C_1 on en déduit que C_0 et C_1 coïncident et sont non vides au voisinage de $[A_{i_0}, A_{i_1}]$. Par conséquent si $\gamma_1 \subset C_0^\infty$ alors $C_0 \subset C_1$.

On peut donc supposer que $C_0 \subset C_1$. On pose $C = C_1 \setminus \overline{C_0}$ et $C^\infty = C_1^\infty \cup]A_{i_0}, A_{i_1}[\cup C_0$. L'ensemble $C = C_1 \setminus \overline{C_0}$ est ouvert car c'est la différence d'un ouvert et d'un fermé. Il est borné car il est inclus dans l'enveloppe convexe C_c de γ . L'ensemble $C^\infty = C_1^\infty \cup]A_{i_0}, A_{i_1}[\cup C_0$ est un ouvert connexe car C_1^∞ et C_0 sont ouverts et connexes, $]A_{i_0}, A_{i_1}[$ est connexe et tout point de

cet intervalle est centre d'un disque ouvert partitionné par C_1^∞ , C_0 et $]A_{i_0}, A_{i_1}[$. Puisque $\mathbf{R}^2 \setminus \gamma$ a au plus deux composantes connexes et qu'il est la réunion de deux ouverts C et C^∞ non-vides et disjoints, ces deux ouverts sont nécessairement connexes. L'un, C , est borné et l'autre, C^∞ , est non borné.