Géométrie affine

Cours de licence
Université de Rennes 1
Jean-Marie Lion
version du 31 janvier 2007

Programme

1. Espaces affines et sous-espaces. Parallélisme.
   Théorème d'incidence.
2. Applications affines, projections, homothéties, translations, symétries. Groupe affine.
3. Enveloppe vectorielle d'un espace affine.
   Repères affines et repères cartésiens.
   Calcul barycentrique.
4. Théorèmes de Desargues, Pappus, Thales, Céva et Menelaüs.
5. Convexité, orientation.
6. Coniques affines.

Bibliographie

Le programme a été élaboré à partir de

[1] M. AUDIN Géométrie, chap 1 et 6
[2] A. BIGARD Géométrie, chap 3, 4 et 9 chap 1 et 6

Les références suivantes ont aussi été utilisées pour construire le cours.

[3] E. ARTIN Algèbre géométrique
[4] M. BERGER Géométrie
[5] H.S.M. COXETER ET S.L. GREITZER Redécouvrons la géométrie
[6] A. CHAMBERT-LOIR Géométrie pour le capes http://perso.univ-rennes1.fr/antoine.chambert-loir
[7] M. COUCHOURON Préparation au capes, notes de cours et exercices (polycopié)
[8] C. DESCHAMPS, J. ODOUX, E. RAMIS Cours de mathématiques spéciales
[9] ENCYCLOPÆDIA UNIVERSALIS Dictionnaire des Mathématiques, algèbre, analyse, géométrie
[10] EUCLIDE Éléments
[11] D. HILBERT, S. COHN-VOSSEN Geometry and the imagination

[12] E. LANNEAU Feuilles d'exercices de géométrie
[13] B. LE STUM Géométrie
http://perso.univ-rennes1.fr/bernard.le-stum
[14] D. PEDOE Geometry, a comprehensive course
[15] P. SAMUEL Géométrie projective
[16] N. TAUVEL Quelques points de mathématiques générales pour l'agrégation (polycopié)
[17] C. TISSERON Géométrie affine, projective et euclidienne

Des compléments historiques peuvent être trouvés sur le site d'histoire des Mathématiques
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/

Les dessins ont été réalisés à l'aide de fig4tex développé par Yvon LAFRANCHE et Daniel MARTIN
http://perso.univ-rennes1.fr/yvon.lafranche/fig4tex/

Indications pratiques

Des feuilles d'exercices seront régulièrement distribuées. Il n'y aura pas de polycopié. En revanche le cours résumé et les feuilles d'exercices sont disponibles en ligne à
http://perso.univ-rennes1.fr/jean-marie.lion
où vous trouverez des archives (contrôles continus et examens).

Trois épreuves de trente minutes comportant des questions de cours et des exercices d'application auront lieu les mardis 27 septembre, 25 octobre et 29 novembre 2005. La note de contrôle continu sera la moyenne des notes obtenues à ces trois épreuves.

L'utilisation des documents, des calculatrices, des ordinateurs et des téléphones est interdite pendant les épreuves de contrôle continu et d'examen final.

Le compas, la règle non graduée, le crayon de papier et la gomme sont indispensables pendant les cours, les TD, les contrôles continus et l'examen final.

L'exactitude, la précision et la rigueur du raisonnement, la concision, le soin dans la présentation et dans les figures sont des éléments importants dont il sera tenu compte dans la notation.

Il est fortement recommandé d'apprendre le cours très régulièrement et de préparer les TD en faisant les exercices indiqués.

Je peux répondre aux questions avant, pendant et après les cours et TD. Si nécessaire, vous pouvez également me rendre visite dans le bâtiment 22-23 (bureau 313) ou me contacter par courrier (casier au 4ème étage du bâtiment 22-23) et par courrier électronique (jean-marie.lion@univ-rennes1.fr).

Syllabus, bibliography

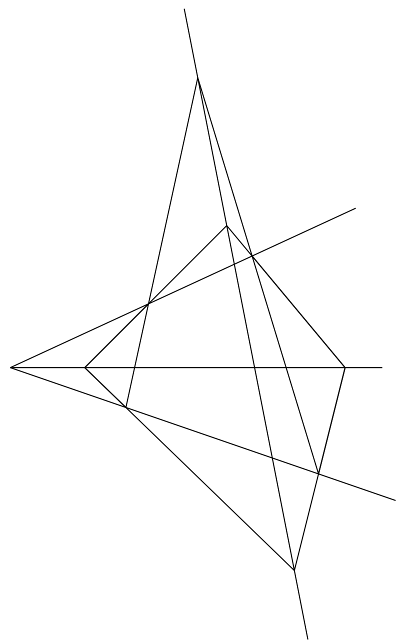
Affine Geometry

Prerequisites : basic algebra and elementary linear algebra

Purposes : introducing the basic notions and techniques of affine geometry

Description : Affine spaces and subspaces. Parallelism. Incidence theorem. Affine morphisms, projections, homotheties, translations. Affine group. Theorem of Desargues, theorem of Pappus, theorem of Thales. Universal space. Affine frames, barycentric cooordinates and affine coordinates. Barycentric calculus. Affine symetries. Affine geometry over ordered fields : convexity, orientation. Affine conics.

References :
Audin, M. : Geometry, chap 1 and 6, Universitex, Springer-Verlag
Bigard, A. : Géométrie, chap 3, 4 and 9, Masson (French)
Pedoe, D. : Geometry. A comprehensive course, Dover



Géométrie affine

Cours de licence
Université de Rennes 1
Jean-Marie Lion
version du 31 janvier 2007

Dans ces notes de cours on considère au début un corps quelconque, puis on le suppose commutatif, ensuite totalement ordonné. Parfois sa caractéristique doit être supposée différente de 2. Il suffit lors d'une première lecture de bien comprendre les cas où le corps est $\mathbf{C}, \mathbf{R}$ ou $\mathbf{Q}$.

Programme

1. Espaces affines et sous-espaces. Parallélisme.
   Théorème d'incidence.
2. Applications affines, projections, homothéties, translations, symétries. Groupe affine.
3. Enveloppe vectorielle d'un espace affine.
   Repères affines et repères cartésiens.
   Calcul barycentrique.
4. Théorèmes de Desargues, Pappus, Thales, Céva et Menelaüs.
5. Convexité, orientation.
6. Coniques affines.

Bibliographie

Le programme a été élaboré à partir de

[1] M. AUDIN Géométrie, chap 1 et 6
[2] A. BIGARD Géométrie, chap 3, 4 et 9 chap 1 et 6

Les références suivantes ont aussi été utilisées pour construire le cours.

[3] E. ARTIN Algèbre géométrique
[4] M. BERGER Géométrie
[5] H.S.M. COXETER ET S.L. GREITZER Redécouvrons la géométrie
[6] A. CHAMBERT-LOIR Géométrie pour le capes
http://perso.univ-rennes1.fr/antoine.chambert-loir
[7] M. COUCHOURON Préparation au capes, notes de cours et exercices (polycopié)

[8] C. DESCHAMPS, J. ODOUX, E. RAMIS Cours de mathématiques spéciales
[9] ENCYCLOPÆDIA UNIVERSALIS Dictionnaire des Mathématiques, algèbre, analyse, géométrie
[10] EUCLIDE Éléments
[11] D. HILBERT, S. COHN-VOSSEN Geometry and the imagination
[12] E. LANNEAU Feuilles d'exercices de géométrie
[13] B. LE STUM Géométrie
http://perso.univ-rennes1.fr/bernard.le-stum
[14] D. PEDOE Geometry, a comprehensive course
[15] P. SAMUEL Géométrie projective
[16] N. TAUVEL Quelques points de mathématiques générales pour l'agrégation (polycopié)
[17] C. TISSERON Géométrie affine, projective et euclidienne

Des compléments historiques peuvent être trouvés sur le site d'histoire des Mathématiques
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/

Les dessins ont été réalisés à l'aide de fig4tex développé par Yvon LAFRANCHE et Daniel MARTIN
http://perso.univ-rennes1.fr/yvon.lafranche/fig4tex/

1 Espaces affines et sous-espaces

A Rappels

I Groupe

Définition I.1 Un groupe $(G,*)$ est un ensemble non vide G muni d'une loi de composition interne $*$, associative, qui admet un élément neutre et telle que tout élément soit inversible. Le groupe $(G,*)$ est dit commutatif si la loi $*$ est commutative.

Exemples I.1 Les ensembles $\mathbf{Z}$ des entiers relatifs, $\mathbf{Q}$ des rationnels, $\mathbf{R}$ des réels et $\mathbf{C}$ des complexes munis de l'addition sont des groupes commutatifs. Si n est un entier naturel alors l'ensemble $n\mathbf{Z}$ des multiples de n muni de l'addition et, si $n \neq 0$, l'ensemble $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ des entiers modulo n muni de l'addition sont aussi des groupes commutatifs. L'ensemble $\mathcal{S}_X$ des bijections d'un ensemble non vide X dans lui même muni de la composition des applications est un groupe. Dès que X possède au moins trois éléments, le groupe $\mathcal{S}_X$ n'est pas commutatif. Si X est fini les bijections de X dans lui même sont appelées permutations, $\mathcal{S}_X$ est le groupe des permutations de X. On note $\mathcal{S}_n$ le groupe des permutations de $\{1,...,n\}$.

Définition I.2 Un sous groupe G' de $(G,*)$ est un sous ensemble G stable par $*$ et tel que $(G',*)$ soit un groupe.

Définition I.3 Un morphisme de groupes est une application ϕ d'un groupe $(G,*)$ dans un groupe $(G',*')$ qui vérifie $\phi(x*y) = \phi(x)*'\phi(y)$

Proposition I.1 *La composée de deux morphismes de groupe est un morphisme de groupe*

Proposition I.2 *Si ϕ : est un morphisme de groupe alors l'image par ϕ d'un sous-groupe de G est un sous-groupe de G' et l'image réciproque d'un sous-groupe de G' est un sous-groupe de G.*

Définitions I.4 L'image réciproque $\ker\phi = \phi^{-1}(e_{G'})$ du neutre de G' s'appelle le noyau du morphisme ϕ. On note $\mathrm{Im}\,\phi = \phi(G)$ le sous-groupe image.

II Action de groupe

Définition II.1 Une action ϕ d'un groupe $(G,*)$ (de neutre e) sur un ensemble X est une application $\phi : G \times X \to X$ telle que si $g, g' \in G$ et $x \in X$ alors $\phi(g', \phi(g,x)) = \phi(g'*g), x)$ et $\phi(e,x) = x$.

On note ϕ_g l'application qui à $x \in X$ associe $\phi(g,x)$. C'est l'action de g sur X. Généralement on omet ϕ et $*$. Les conditions précédentes s'écrivent alors $g'(gx) = (g'g)x$ et $ex = x$.

Proposition II.1 *Si $g \in G$ l'action de g sur X est bijective*

Définitions II.2 L'action de G sur X est dite simple si pour tout $(g,x) \in G \times X$ avec $g \neq e$ on a $gx \neq x$. L'action est dite transitive si pour tout $(x,x') \in X^2$ il existe $g \in G$ tel que $gx = x'$.

Exemples II.1 Un groupe G agit simplement et transitivement sur lui-même. Le groupe $\mathcal{S}_X$ des bijections d'un ensemble X dans lui même agit transitivement. Si X posède au moins trois éléments alors l'action n'est pas simple. Si $X = \{1,2,3,4\}$ et G est le groupe composé de l'identité et de la permutation qui échange 1 avec 2 et 3 avec 4 alors l'action de G sur X est simple et non transitive.

Définitions II.3 L'orbite d'un élément $x \in X$ sous l'action du groupe G est l'ensemble $Gx = \{gx : g \in G\}$. Le stabilisateur de x est le sous-groupe $G_x = \{g \in G : gx = x\}$.

Remarques II.1 L'action est simple si $G_x = \{e\}$ pour tout $x \in X$. L'action est transitive si $Gx = X$ pour tout $x \in X$. L'action est simple et transitive si à x fixé l'application $g \mapsto gx$ est bijective.

III Corps

Définition III.1 Un corps $(\mathbf{K}, \top, *)$ est un ensemble non vide $\mathbf{K}$ muni de deux lois de composition interne $\top$ et $*$ telles que $(\mathbf{K}, \top)$ est un groupe commutatif de neutre $0_{\mathbf{K}}$, $*$ est distributive par rapport à $\top$, et $(\mathbf{K} \setminus \{0_{\mathbf{K}}\}, *)$ est un groupe. Le neutre $1_{\mathbf{K}}$ de $*$ est appelé unité. Le corps $(\mathbf{K}, \top, *)$ est dit commutatif si $*$ est commutative.

Exemples III.1 Les ensembles $\mathbf{Q}$ des rationnels, $\mathbf{R}$ des réels et $\mathbf{C}$ des complexes munis de l'addition et de la multiplication sont des corps commutatifs. Si $p > 1$ est un entier premier alors $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}, +, x)$ est un corps commutatif. Plus généralement, un théorème de Wedderburn affirme que tout corps fini est commutatif. Le corps des quaternions est un exemple de corps non commutatif (voir TD).

Définition III.2 Si $(\mathbf{K}, \top, *)$ est un corps il existe un unique morphisme de groupe $\phi : \mathbf{Z} \to \mathbf{K}$ qui envoie 1 sur l'unité de $\mathbf{K}$. Son noyau $\ker \phi = \phi^{-1}(0_{\mathbf{K}})$ est un groupe de la forme $p\mathbf{Z}$ où p est soit nul soit premier. Cet entier p s'appelle la caractéristique de $\mathbf{K}$.

IV Espace vectoriel

Définition IV.1 Soit $(\mathbf{K}, \top, *)$ un corps. Un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ (ou $\mathbf{K}$-espace vectoriel, ou encore espace vectoriel si le corps $\mathbf{K}$ est sous-entendu) est un ensemble non vide E muni d'une loi interne $+$ et d'une loi externe $\cdot$ de domaine d'opérateurs $\mathbf{K}$ tels que :

- $(E, +)$ est un groupe commutatif,

- si $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ alors $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$, $1_{\mathbf{K}} \cdot x = x$, $(\lambda \top \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$ et $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda * \mu) \cdot x$.

Les éléments d'un espace vectoriel s'appellent vecteurs.

Dans la suite on notera indifféremment par $+$ les lois additives de $\mathbf{K}$ et E et on omettra de noter les lois $*$ et $\cdot$. Les neutres de E de de $(\mathbf{K}, +)$ sont notés 0. L'unité de $\mathbf{K}$ est notée 1.

Exemples IV.1 Si $\mathbf{K}$ est un corps alors $\mathbf{K}^n$, $\{f : X \to \mathbf{K}\} = \mathbf{K}^X$ où X est ensemble, l'espace des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans $\mathbf{K}$ sont naturellement munis de structures de $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. Si F est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel alors $\{f : X \to F\} = F^X$ est aussi muni d'une structure de $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

Définition IV.2 Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments d'un espace vectoriel E. Une combinaison linéaire des $(e_i)_{i\in I}$ est une somme finie $\sum_{j\in J}\lambda_j e_j$ où $J\subset I$ fini et $(\lambda_j)_{j\in J}\in\mathbf{K}^J$. La combinaison linéaire est dite triviale si les λ_j sont tous nuls. La famille $(e_i)_{i\in I}$ est une famille libre si toute combinaison linéaire des $(e_i)_{i\in I}$ égale à 0 est triviale. C'est une famille génératrice si tout vecteur x est une combinaison linéaire des $(e_i)_{i\in I}$. C'est une base si c'est une famille libre et génératrice.

Théorème IV.1 *Toute famille libre peut être complétée en une base et toute famille génératrice contient une base.*

Théorème IV.2 *Deux bases d'un même espace vectoriel ont le même cardinal.*

Définition IV.3 La dimension $\dim E$ d'un espace vectoriel E est le cardinal d'une de ses bases.

Définition IV.4 Un sous espace vectoriel E' d'un espace vectoriel E est un sous-ensemble non vide de E stable par les deux lois de E.

Proposition IV.1 *L'intersection de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.*

Proposition IV.2 *Un sous-espace vectoriel E' d'un espace vectoriel E hérite d'une structure d'espace vectoriel.*

Définitions IV.5 Soit E un espace vectoriel. Si $X\subset E$ on note $\mathrm{Vect} X$ l'ensemble des combinaisons linéaires de X. C'est un sous-espace vectoriel de E. C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient X. La somme $E'+E''$ de deux sous-espaces vectoriels E' et E'' est $\mathrm{Vect}(E'\cup E'')$. La somme est dite directe si $E'\cap E''=\{0\}$. Elle est alors notée $E'\oplus E''$.

Proposition IV.3 *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- La somme de E' et de E'' est directe.

- Si $x\in E'+E''$ alors il existe un unique couple $(x',x'')\in E'\times E''$ tel que $x=x'+x''$.

- Il existe $x\in E'+E''$ pour lequel il existe un unique couple $(x',x'')\in E'\times E''$ tel que $x=x'+x''$.

Théorème IV.3 *Soient $E',E''\subset E$ deux sous-espaces vectoriels. Alors*

$$\dim(E'+E'')+\dim(E'\cap E'')=\dim E'+\dim E''.$$

Définitions IV.6 Une application linéaire L entre deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels E et F est une application $L : E \to F$ qui vérifie : si $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbf{K}$ alors $L(x+y) = L(x) + L(y)$ et $L(\lambda x) = \lambda x$. Une application linéaire est appelée aussi morphisme (linéaire). Un isomorphisme est une application linéaire bijective. Un endomorphisme est un application linéaire d'un espace vectorile E dans lui-même. Un automorphisme est un endomorphisme bijectif. On note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes d'un espace vectoriel E.

Proposition IV.4 *L'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F est un sous-espace vectoriel de F^E.*

Proposition IV.5 *La composée de deux applications linéaires ainsi que la réciproque d'une application linéaire bijective sont des applications linéaires. En particulier* $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ *est un groupe.*

Proposition IV.6 *Soit $L : E \to F$ une application linéaire et E', F' des sous-espaces vectoriels de E et F. Alors $L(E')$ et $L^{-1}(F')$ sont des sous-espaces vectoriels de F' et E'.*

Proposition IV.7 *L'application linéaire L est injective si et seulement si* $\ker L = \{0\}$.

Théorème IV.4 *Soit une application linéaire $L : E \to F$. Alors*

$$\dim E = \dim \ker L + \dim \mathrm{Im}\, L.$$

Définition IV.7 Le rang $\mathrm{rg}\, L$ de l'application linéaire L est la dimension de son image $\mathrm{Im}\, L$.

Proposition IV.8 *Soient E, F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, $b = (b_i)_{i \in I}$ une base de E et $(f_i)_{i \in I} \in F^I$. Il existe une unique application linéaire L telle que $L(e_i) = f_i$ si $i \in I$.*

Proposition IV.9 *Soient E, F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, E' un sous-espace vectoriel de E et $L' : E' \to F$ une application linéaire. Il existe un prolongement linéaire $L : E \to F$ de L'. Ce prolongement n'est pas unique si $E' \neq E$.*

B Espaces affines

I Introduction

Soit $\mathbf{K}$ un corps, $(E, +, \cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{E}$ un ensemble non vide.

Définition I.1 Munir $\mathcal{E}$ d'une structure d'espace affine dirigé par E c'est lui associer une action simple et transitive du groupe commutatif $(E,+)$.

Définition I.2 Munir $\mathcal{E}$ d'une structure d'espace affine dirigé par E c'est lui associer une application de $\mathcal{E}\times\mathcal{E}$ dans E notée $(x,y)\mapsto\overrightarrow{xy}$ telle que

- $\overrightarrow{xy}+\overrightarrow{yz}=\overrightarrow{xz}$ si $x,y,z\in\mathcal{E}$ (Chasles)

- à x fixé, l'application $y\mapsto\overrightarrow{xy}$ est bijective.

Définition I.3 Munir $\mathcal{E}$ d'une structure d'espace affine dirigé par E c'est lui associer une application de $E\times\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ notée $(v,x)\mapsto x+v$ telle que :

- $(x+v)+w=x+(v+w)$, $x+0=x$ si $x\in\mathcal{E}, v,w\in E$

- à $x\in\mathcal{E}$ fixé, l'application $v\mapsto x+v$ est une bijection de E dans $\mathcal{E}$.

Les trois définitions sont équivalentes. Les éléments de $\mathcal{E}$ s'appellent des points. L'espace E est la direction ou espace directeur de $\mathcal{E}$.

Définition I.4 La dimension d'un espace affine $\mathcal{E}$ est la dimension de sa direction.

Définition I.5 Une droite affine est un espace affine de dimension 1. Un plan affine est un espace affine de dimension 2.

Soit E un **K**-espace vectoriel, $\mathcal{E}$ un espace affine dirigé par E et o un point de $\mathcal{E}$. On définit sur $\mathcal{E}$ l'addition et la multiplication par un scalaire suivantes. Si $x,y\in\mathcal{E}$ et $\lambda\in\mathbf{K}$, on note $x+y$ l'unique point z tel que $\overrightarrow{ox}+\overrightarrow{oy}=\overrightarrow{oz}$ et on note λx l'unique point z' tel que $\lambda\overrightarrow{ox}=\overrightarrow{oz'}$. On muni ainsi $\mathcal{E}$ d'une structure d'espace vectoriel noté $\overrightarrow{\mathcal{E}_o}$. L'espace $\overrightarrow{\mathcal{E}_o}$ s'appelle le vectorialisé de E d'origine o. Cette structure dépend bien sûr du choix de o. L'application qui à $v\in E$ associe le point $o+v$ est un isomorphisme entre E et $\overrightarrow{\mathcal{E}_o}$. Vectorialiser un espace affine revient donc à choisir l'origine, c'est à dire le neutre pour l'addition.

Exemples I.1 L'addition de deux vecteurs confère à un espace vectoriel E la structure d'espace affine dirigé par lui-même : $\mathcal{E}=E$ et si $v\in E$ et $x\in\mathcal{E}=E$ alors $x+v$, vu comme résultant de l'action du vecteur v sur le point x est le point de $\mathcal{E}=E$ qui, vu comme vecteur, est la somme de x vu comme vecteur et du vecteur v. Vu comme espace affine, l'espace E n'a plus de point privilégié. En particulier le rôle du neutre disparaît. Ainsi le corps **K** peut être vu comme droite vectorielle ou comme droite affine.
Si E_1 et E_2 sont deux **K**-espaces vectoriels, le produit $E_1\times E_2$ est muni d'une structure d'espace vectoriel en posant $(u_1,v_1)+(u_2,v_2)=(u_1+u_2,v_1+v_2)$ et

$\lambda(u_1,u_2) = (\lambda u_1, \lambda u_2)$. Si $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont deux espaces affines dirigés respectivement par les E_1 et E_2 alors $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ est un espace affine dirigé par le **K**-espace vectoriel $E_1 \times E_2$: l'action de $E_1 \times E_2$ sur $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ est définie par l'identité

$$(x_1,x_2) + (v_1,v_2) = (x_1 + v_1, x_2 + v_2).$$

II Sous-espace affine

Définition II.1 Un sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ est un sous-espace affine s'il existe un sous-espace vectoriel F de la direction E de $\mathcal{E}$ et $z \in \mathcal{F}$ tels que $\mathcal{F} = z + F = \{z + v : v \in F\}$.

Exemple II.1 Les points d'un espace affine sont les sous-espaces affines dirigés par l'espace nul $\{0\}$.

Proposition II.1 *Le sous-espace affine $\mathcal{F} = z + F$ est naturellement muni d'une structure d'espace affine dirigé par F.*

Proposition II.2 $F = \{\overrightarrow{xy} : x, y \in \mathcal{F}\} = \{\overrightarrow{z'y} : y \in \mathcal{F}\}$ *si* $z' \in \mathcal{F}$.

Remarque II.1 Puisqu'un espace vectoriel est un espace affine sur lui-même on peut considérer ses sous-espaces affines. En particulier les sous-espaces vectoriels sont les sous-espaces affines qui passent par l'origine 0.

Définition II.2 Des points sont dits alignés s'il appartiennent à la même droite affine.

Définition II.3 Deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 d'un espace vectoriel E sont suplémentaires si $E = E_1 \oplus E_2$.

On déduit immédiatement du théorème de la base incomplète que tout sous-espace vectoriel admet un suplémentaire. On peut aussi montrer que tous les suplémentaires d'un sous-espace vectoriel ont même dimension.

Définition II.4 La codimension d'un sous-espace vectoriel est la dimension d'un quelconque de ses suplémentaires.

Définition II.5 Un hyperplan vectoriel est un sous-espace vectoriel de codimension un.

Définition II.6 Soit $\mathcal{E}$ dirigé par E et $\mathcal{E}'$ sous-espace affine de $\mathcal{E}$ dirigé par E'. La codimension de $\mathcal{E}'$ est la codimension de E'.

Définition II.7 Un sous-espace affine est un hyperplan affine s'il est de codimension un.

On a vu qu'un espace vectoriel est un espace affine dirigé par lui-même et que les applications linéaires conservent la structure vectorielle. La proposition suivante affirme qu'elles conservent les structures affines.

Proposition II.3 *Soit $L : E \to F$ une application linéaire et soit $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{F}'$ des sous-espaces affines de E et F dirigés par E' et F'. Alors $L(\mathcal{E}')$ et $L^{-1}(\mathcal{F}')$ sont des sous-espaces affines de F et E dirigés par $L(E')$ et $L^{-1}(F')$.*

Exemple II.2 On déduit de cette proposition que le sous-ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires (avec second membre) est un sous-espace affine s'il n'est pas vide.

III Parallélisme

Définition III.1 Deux sous-espaces affines $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ d'un espace affine $\mathcal{E}$ sont dits parallèles s'ils ont même direction.

Proposition III.1 *Deux sous-espaces affines parallèles sont confondus ou disjoints.*

La réciproque à cette proposition est fausse.

Exemple III.1 Prendre $\mathcal{E} = \mathbf{R}^3$, $\mathcal{F} = \{z = 0\}$ et $\mathcal{G} = \{(0,0,1)\}$.

Proposition III.2 *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine dirigé par E, $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ dirigé par F, et $v \in E$ un vecteur. Alors $\mathcal{F} + v = \{y \in \mathcal{E} : \exists x \in \mathcal{F}, \overrightarrow{xy} = v\}$ est un sous-espace affine dirigé par F. Tout sous-espace affine parallèle à $\mathcal{F}$ s'obtient de cette façon.*

La proposition suivante est une généralisation de l'axiome des droites parallèles de la géométrie plane axiomatisée par Euclide et Desargues.

Proposition III.3 *Soient $\mathcal{E}$ un espace affine dirigé par E, et* $\mathbf{F}$ *un sous-espace affine de direction F et x un point de $\mathcal{E}$. Il existe un unique espace affine parallèle à* $\mathbf{F}$ *qui passe par x.*

Un axiome suivant Euclide devient avec le point de vue du cours une proposition.

Proposition III.4 *Par deux points distincts a et b d'un espace affine passe une et une seule droite notée ab.*

Les plans affines sont les seuls espaces affines pour lesquels l'énoncé suivant est vrai.

Proposition III.5 *Soient δ et δ' deux droites différentes d'un plan affine. Alors δ et δ' sont parallèles ou concourantes en un unique point.*

Définition III.2 Quatre points distincts et non alignés p,q,r,s d'un espace affine forment un parallélogramme non dégénérés si les droites pq et sr sont parallèles ainsi que ps et qr.

Proposition III.6 *Quatre points distincts et non alignés p,q,r,s d'un espace affine forment un parallélogramme non dégénéré si et seulement si $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{sr}$ et $\overrightarrow{ps} = \overrightarrow{qr}$. Dans ce cas p,q,r,s appartiennent à un même plan affine.*

Définition III.3 Quatre points p,q,r,s d'un espace affine forment un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{sr}$ et $\overrightarrow{ps} = \overrightarrow{qr}$.

IV Intersection, sous-espace engendré, repère affine

Proposition IV.1 *Soit $(\mathcal{E}_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces affines d'un espace affine $\mathcal{E}$. Alors l'intersection $\cap_{i\in I}\mathcal{E}_i$, si elle contient un point x, est le sous-espace affine contenant x et dirigé par l'intersection $\cap_{i\in I}E_i$ des directions E_i des $\mathcal{E}_i$.*

Corollaire IV.1 *Soit $P \subset \mathcal{E}$ affine. Si P non vide, l'intersecion des sous-espaces qui contiennent P est un sous-espace affine noté $< P >$ et appelé sous-espace engendré par P. Ce sous-espace est dirigé par* $\mathrm{Vect}\{\overrightarrow{xy} : x,y \in P\}$ *qui est égal à* $\mathrm{Vect}\{\overrightarrow{zy} : y \in P\}$ *avec $z \in P$.*

Proposition IV.2 *Soit P une partie non vide d'un sous-espace affine et soit $x,y \in P$. La famille $\{\overrightarrow{xz} : z \in P\setminus\{x\}\}$ est libre si et seulement si la famille $\{\overrightarrow{yz} : z \in P\setminus\{y\}\}$ est libre. On dit alors que les points $(z)_{z\in P}$ sont affinement indépendants.*

Définition IV.1 Une partie non vide P de l'espace affine $\mathcal{E}$ est génératrice si $< P >= \mathcal{E}$. C'est un repère affine de $\mathcal{E}$ si elle est génératrice et si c'est une famille de points indépendants et si $< P >= \mathcal{E}$.

Proposition IV.3 *Si P est un repère affine d'un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension finie alors* $\mathrm{Card}\, P = 1 + \dim \mathcal{E}$.

Proposition IV.4 *Toute famille de points affinement indépendants peut être complétée en un repère affine et toute famille génératrice de points contient un repère affine.*

V Théorème d'incidence

Théorème V.1 *Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines d'un espace affine $\mathcal{E}$ dirigés respectivement par F et G. Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ ont au moins un point commun alors*

$$\dim < \mathcal{F} \cup \mathcal{G} >= \dim(F+G).$$

Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont disjoints alors

$$\dim < \mathcal{F} \cup \mathcal{G} >= 1+\dim(F+G),$$

et si de plus $\dim \mathcal{E} < +\infty$ *alors*

$$\dim \mathcal{F} + \dim \mathcal{G} < \dim \mathcal{E} + \dim F \cap G.$$

Corollaire V.1 *Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines d'un espace affine $\mathcal{E}$ dirigés respectivement par F, G E. Si $E = F + G$ alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est non vide et si $E = F \oplus G$ alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un singleton.*

Puisque $\dim(F+G) = \dim \mathcal{F} + \dim \mathcal{G} - \dim F \cap G$ la dernière affirmation du théorème est équivalente à l'énoncé suivant.

Théorème V.2 *Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont disjoints et si* $\dim \mathcal{E} < +\infty$ *alors*

$$\dim(F+G) < \dim \mathcal{E}.$$

2 Applications affines

Dorénavant on fixe un corps $(\mathbf{K}, +, *)$.

A Applications affines

I Introduction

Définition I.1 Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines dirigés respectivement par E et F. Une application $\mathcal{A} : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est dite affine s'il existe $o \in \mathcal{E}$ tel que l'application $L_{\mathcal{A},o} : E \to F$ qui à $v \in E$ associe $\overrightarrow{\mathcal{A}(o)\mathcal{A}(o+v)}$ soit linéaire.

Proposition I.1 *La définition précédente est indépendante du choix de $O \in \mathcal{E}$. Si $\mathcal{A}$ est linéaire L'application $L_{\mathcal{A},o}$ est indépendante du choix de o et elle est appelée application linéaire $L_{\mathcal{A}}$ associée à $\mathcal{A}$.*

Remarques I.1 Les applications linéaires sont des applications affines particulières.
Soient E et F deux espaces vectoriels et $\mathcal{A} : E \to F$ affine de partie linéaire A. Alors $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(o) + A(x)$ si $x \in E$. De plus toute application de ce type est affine.

Définition I.2 Le rang d'une application affine est le rang de l'application linéaire associée.

Remarque I.2 On parle d'endomorphisme affine, d'isomorphisme affine et d'automorphisme affine. Deux espaces sont dits isomorphes s'il existe un isomorphisme affine qui va de l'un vers l'autre.

Proposition I.2 *Soient $\mathcal{A} : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ affine, $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{F}'$ des sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ dirigés par E' et F'. Alors $\mathcal{A}(\mathcal{E}')$ et $\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{F}')$ sont des sous-espaces affines de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{E}$ dirigés par $L_{\mathcal{A}}(E')$ et $L_{\mathcal{A}}^{-1}(F')$.*

En particulier les applications affines préservent le parallélisme par image directe et réciproque et l'alignement par image directe.

Proposition I.3 *La composée de deux applications affines est une application affine. La partie linéaire de la composée est la composée des parties linéaires.*

Proposition I.4 *Soit $\mathcal{A} : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ affine. Alors la dimension de $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ est le rang de $\mathcal{A}$. Si $y \in \mathcal{A}(\mathcal{E})$ alors la codimension de $\mathcal{A}^{-1}(y)$ est égale au rang de $\mathcal{A}$.*

Définition I.3 Une application affine $\mathcal{A} : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est appelée forme affine si $\mathcal{F}$ est le corps $\mathbf{K}$ (vu comme droite affine). Si $y \in \mathbf{K}$ le sous-espace affine $\mathcal{A}^{-1}(y)$ est appelé niveau y de $\mathcal{A}$.

Proposition I.5 *Un hyperplan affine est le niveau* 1 *d'une forme affine.*

Proposition I.6 *Une application affine est bijective si et seulement si sa partie linéaire est un isomorphisme. Sa réciproque est alors affine.*

Proposition I.7 *Soit $\mathcal{A} : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une application affine et P un repère affine de $\mathcal{E}$. L'application $\mathcal{A}$ est injective si et seulement si l'image de P est une famille de points indépendants. Elle est surjective si et seulement si l'image de P est génératrice de $\mathcal{F}$. Elle est bijective si et seulement si l'image de P est un repère affine de $\mathcal{F}$.*

II Translations, homothéties, Desargues I, Pappus I, Thalès

Proposition II.1 *Le corps* $\mathbf{K}$ *est non commutatif si et seulement s'il existe des homothéties vectorielles qui ne commutent pas.*

Définitions II.1 Un endomorphisme affine est une homothétie (affine) si sa partie linéaire est une homothétie (vectorielle). C'est une translation si sa partie linéaire est l'identité.

Proposition II.2 *L'ensemble des translations est stable par composition. Muni de cette loi, il forme un groupe commutatif appelé groupe des translations. Ce groupe agit simplement et transitivement sur* $\mathcal{E}$*. Il existe un isomorphisme* t *entre la direction* E *de* $\mathcal{E}$ *et ce groupe qui commute avec leurs actions sur* $\mathcal{E}$*.*

Remarques II.1 L'isomorphisme t est simplement l'application qui à $v \in E$ associe l'action de v sur $\mathcal{E}$. Cette action est une translation t_v de vecteur v : $t_v(x) = y$ avec $\overrightarrow{xy} = v$.
Etant donné deux droites parallèles δ et δ' ainsi que des points $a \in \delta$ et $a' \in \delta'$, l'ensemble des vecteurs $v \in E$ tels que $t_v(\delta) = \delta'$ est la droite affine de E qui contient le vecteur $\overrightarrow{aa'}$ et qui est dirigée par la direction de δ.

Théorème II.1 *L'ensemble des homothéties non constantes et des translations est stable par composition. Muni de cette loi, il forme un groupe appelé groupe des dilatations ou des homothéties-translations.*

Proposition II.3 *Si* $\mathbf{K} \neq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ *et si* $\mathcal{E}$ *n'est pas réduit à un point le groupe des dilatations n'est pas commmutatif.*

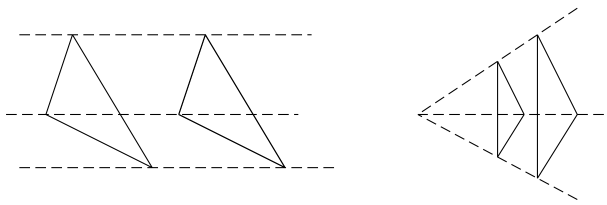
Proposition II.4 *Une dilatation sans point fixe est une translation. Une dilatation qui a un seul point fixe est une homothétie. Une dilatation qui a au moins deux points fixes est l'identité.*

Les dilatations admettent la caractérisation suivante.

Théorème II.2 *Soit* $\mathcal{A}$ *un automorphisme affine. C'est une dilatation si et seulement si* δ *et* $\mathcal{A}(\delta)$ *sont parallèles quelque soit la droite* δ*. C'est une homothétie si et seulement s'il existe un point* o *tel que* $\mathcal{A}(\delta) = \delta$ *quelque soit la droite* δ *qui passe par* o*. C'est une translation différente de l'identité si et seulement s'il est sans point fixe et il existe une droite vectorielle* D *telle que* $\mathcal{A}(\delta) = \delta$ *quelque soit la droite* δ *dirigée par* D*.*

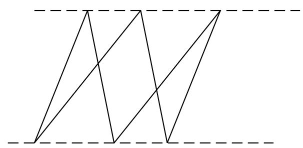
Lemme II.1 *Soit* a *un point d'un plan* $\mathcal{P}$ *et* δ, δ' *deux droites parallèles de* $\mathcal{P}$ *et qui ne contiennent pas* a*. Il existe une et une seule homothétie qui fixe* a *et qui envoie* δ *sur* δ'*.*

Théorème II.3 *(Desargues et parallèles) Si $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ sont trois droites distinctes, concourantes ou parallèles, $a_i, b_i \in \delta_i, i = 1,2,3$ sont des points distincts de l'éventuel point commun aux trois droites et si a_1a_2 et b_1b_2 sont parallèles ainsi que a_2a_3 et b_2b_3 alors a_1a_3 et b_1b_3 sont parallèles.*



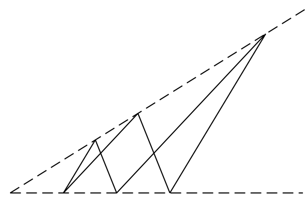
Il découle de la commutativité du groupe des translations un premier énoncé de Pappus.

Théorème II.4 *(Pappus, parallèles et translations) Soient $\delta \neq \delta'$ deux droites parallèles d'un plan affine $\mathcal{P}$ et soient $a,b,c \in \delta$ et $a',b',c' \in \delta'$. On suppose les droites ab' et ba' parallèles et les droites bc' et cb' parallèles. Alors les droites ca' et ac' sont parallèles.*



La commutativité du corps $\mathbf{K}$ admet l'interprétation géométrique suivante qui est un second énoncé de Pappus.

Théorème II.5 *(Pappus, parallèles et homothéties) Le corps $\mathbf{K}$ est commutatif si et seulement si l'énoncé suivant est vrai : "Soient $\delta \neq \delta'$ deux droites concourantes d'un plan affine $\mathcal{P}$ et soient $a,b,c \in \delta \setminus \delta'$ et $a',b',c' \in \delta' \setminus \delta$. On suppose les droites ab' et ba' parallèles et les droites bc' et cb' parallèles. Alors les droites ca' et ac' sont parallèles."*



Remarques II.2 Les endomorphismes linéaires d'une droite vectorielle sont les homothéties. Par conséquent les endomorphismes affines d'une droite affine sont les homothéties et les translations. En particulier étant donnés quatre points a,b,c et d d'une droite affine avec $a \neq b$ il existe une unique application affine $\mathcal{A}$ telle que $\mathcal{A}(a) = c$ et $\mathcal{A}(b) = d$. Sa partie linéaire est une homothétie.

Définition II.2 On appelle rapport de a,b,c et d et on note $\frac{\overline{cd}}{\overline{ab}}$ le rapport de cette homothétie.

Théorème II.6 *(Thalès) Soient $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ trois droites parallèles d'un plan affine $\mathcal{P}$ et δ et δ' deux droites de $\mathcal{P}$ non parallèles aux δ_i. On note a_i et a'_i les points d'intersection de δ_i avec δ et δ'. Il existe λ tel que $\overrightarrow{a_1a_3} = \lambda\overrightarrow{a_1a_2}$ et $\overrightarrow{a'_1a'_3} = \lambda\overrightarrow{a'_1a'_2}$ c'est à dire $\frac{\overline{a_1a_3}}{\overline{a_1a_2}} = \frac{\overline{a'_1a'_3}}{\overline{a'_1a'_2}}$.*

Dorénavant on fera de la géométrie affine sur des corps commutatifs. Ceci nous permettra d'utiliser les outils d'agèbre multilinéaire comme le déterminant d'un endomorphisme linéaire. Il sera alors sous-entendu qu'on travaille dans un espace de dimension finie.

Définition II.3 Le déterminant d'un endomorphisme affine est le déterminant de sa partie linéaire.

Proposition II.5 *Le déterminant de la composée de deux endomorphismes affines affines est le produit de leur déterminants.*

Proposition II.6 *Un endomorphisme affine est un automorphisme affine si et seulement si son déterminant est non nul.*

Définition II.4 Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E. Le groupe linéaire $GL(E)$ est le groupe des automorphismes linéaires de E. Le groupe affine $GA(\mathcal{E})$ est le groupe des automorphismes affines de $\mathcal{E}$.

Proposition II.7 *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension finie et E sa direction. Le sous-ensemble $SL(E)$ des applications linéaires de déterminant 1 est un sous-groupe du groupe linéaire $GL(E)$. Le sous-ensemble $SA(\mathcal{E})$ des automorphismes affines de déterminant 1 est un sous-groupe du groupe affine $GA(\mathcal{E})$.*

III Projections, symétries

On suppose le corps $\mathbf{K}$ de caractéristique différente de 2.

Définitions III.1 Une projection (affine) est un endomorphisme affine qui coïncide avec son carré. Une symétrie (affine) est un endomorphisme affine dont le carré est l'identité.

Remarque III.1 Le déterminant d'une projection affine qui n'est pas l'identité est 0. Le déterminant d'une symétrie affine est 1 ou -1.

Proposition III.1 *Si un endomorphisme affine est une projection (resp. une symétrie) alors sa partie linéaire est une projection (resp. une symétrie).*

Proposition III.2 *Soit $\mathcal{E}'$ un sous espace affine dirigé par E' et F un suplémentaire de E' dans la direction E de $\mathcal{E}$. Il existe une unique symétrie s dont l'ensemble des points fixes est $\mathcal{E}'$ et qui laisse globalement invariant chaque sous-espace $e+F$ avec $e \in \mathcal{E}'$. Les symétries sont toutes de ce type. Il existe une unique projection p dont l'ensemble des points fixes est $\mathcal{E}'$ et qui envoie chaque sous-espace $e+F$ sur e si $e \in \mathcal{E}'$. Les projections sont toutes de ce type.*

Définitions III.2 On dit que s est la symétrie par rapport à $\mathcal{E}'$ et de direction F et que p est la projection sur $\mathcal{E}'$ de direction F.

IV Affinités, transvections

Définition IV.1 Soit $\mathcal{E}'$ un sous-espace affine d'un espace affine $\mathcal{E}$, E' sa direction, F un suplémentaire à E' et $\lambda \in \mathbf{K}$ L'affinité de base $\mathcal{E}'$, de direction F et de rapport λ est l'application affine qui à $x \in \mathcal{E}$ associe le point y tel que $\overrightarrow{p(x)y} = \lambda\overrightarrow{p(x)x}$ où $p(x)$ est le projeté de x sur $\mathcal{E}'$ parallèlement à F. Une affinité dont la base est un hyperplan est dite hyperplane.

Remarques IV.1 Une homothétie est une affinité dont la base est un point. Une projection est une affinité de rapport nul. Une symétrie est une affinité de rapport -1. Le déterminant d'une affinité hyperplane est égal à son rapport.

Remarque IV.2 Une affinité de rapport $\lambda \neq 0$ est inversible et son inverse est une affinité de rapport $1/\lambda$.

Proposition IV.1 *Soit $\lambda \neq 1$. Une application affine u est une affinité de rapport λ si et seulement si pour tout point x on a $\overrightarrow{u(x)u^2(x)} = \lambda\overrightarrow{xu(x)}$.*

Définition IV.2 Soit $\mathcal{E}'$ un hyperplan affine. Une transvection de base $\mathcal{E}'$ est une application affine τ qui fixe $\mathcal{E}'$ et tel que $\overrightarrow{x\tau(x)} \in E'$ si $x \in \mathcal{E}$.

Proposition IV.2 *Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine de $\mathcal{E}$ de direction H. Une application affine τ qui fixe les points de $\mathcal{H}$ est une transvection de base $\mathcal{H}$ si et seulement s'il existe un vecteur non nul $v \in H$ tel que $\overrightarrow{x\tau(x)}$ est colinéaire à v quelque soit le point x.*

Remarques IV.3 Le déterminant d'une transvection est 1. L'inverse d'une transvection est une transvection.

Proposition IV.3 *Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine de $\mathcal{E}$ de direction H, $x \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{H}$ et $w \in E$. Si $w \in H$ il existe une unique transvection τ de base $\mathcal{H}$ telle que $w = \overrightarrow{x\tau(x)}$. Si $w \notin H$ il existe une unique affinité hyperplane u de base $\mathcal{H}$ telle que $w = \overrightarrow{xu(x)}$.*

Proposition IV.4 *(rappel important)Soit $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ des espaces affines, $(p_i)_{i\in I}$ un repère affine de $\mathcal{E}$ et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de points de $\mathcal{F}$. Il existe une et une seule application affine $\mathcal{A}$ telle que $\mathcal{A}(e_i) = f_i$ si $i \in I$.*

B Générateurs du groupe affine

On suppose que le corps de $\mathbf{K}$ a au moins trois éléments et qu'il est de caractéristique différente de 2.

I Introduction

Proposition I.1 *Si $\dim \mathcal{E} \geq 1$ et si $u \in GA(\mathcal{E})$ différent de l'identité, il existe $v \in GA(\mathcal{E})$ tel que $u \circ v \neq v \circ u$.*

II Les affinités hyperplanes engendrent $GA(\mathcal{E})$ (en dimension finie)

Proposition II.1 *Une transvection de base $\mathcal{H}$ est le produit de deux affinités de base $\mathcal{H}$.*

Théorème II.1 *Si $\dim \mathcal{E} < +\infty$ les affinités hyperplanes engendrent $GA(\mathcal{E})$.*

III Les transvections engendrent le sous groupe $SA(\mathcal{E})$ (en dimension finie)

Théorème III.1 *Si $\dim \mathcal{E} < +\infty$ les transvections engendrent $SA(\mathcal{E})$.*

Proposition III.1 *Si $\dim \mathcal{E} < +\infty$ tout automorphisme affine est le produit d'une affinité hyperplane et de transvections.*

IV Alignement et application semi-affine

Partie culturelle où l'on apprend que les applications affines sont, avec les applications semi-affines, les seules qui préservent l'alignement, ou presque...

Définitions IV.1 Une application $\sigma : \mathbf{K} \to \mathbf{K}$ est un automorphisme de corps si c'est un automorphisme de groupe et si $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$.
Une application $L : E \to F$ entre espaces vectoriels est dite semi-linéaire s'il existe un automorphisme de corps σ tel que $L(\lambda v + w) = \sigma(\lambda)L(v) + L(w)$.
Une application $\mathcal{A} : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ entre deux espaces affines est dite semi-affine s'il existe $o \in \mathcal{E}$ tel que $L_{\mathcal{A},o}$ soit semi-linéaire. Dans ce cas $L_{\mathcal{A},o}$ ne dépend pas du choix de o.

Proposition IV.1 *Une application semi-affine préserve l'alignement.*

Exemple IV.1 La conjuguqison dans $\mathbf{C}$ est un automorphisme de corps. L'application $(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 \mapsto (\overline{z_1}, \overline{z_2})$ est semi-affine.

Proposition IV.2 *Le seul automorphisme de corps que possède* $\mathbf{R}$ *est l'identité.*

Théorème IV.1 *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension au moins 2 dirigé par un* $\mathbf{R}$ *espace vectoriel. Si $\mathcal{A} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une application bijective, qui préserve l'alignement alors elle est semi-affine.*

3 Enveloppe vectorielle, calcul barycentrique

On sait munir un espace affine $\mathcal{E}$ d'un repère affine. On appelle repère cartésien de $\mathcal{E}$ la donnée d'un point o de $\mathcal{E}$ et d'une base $(e_i)_{i\in I}$ de sa direction E. L'application qui à $p \in \mathcal{E}$ associe les coordonées du vecteur $\overrightarrow{op}$ dans cette base s'appelle coordonnées cartésiennes dans le repère $(o, (e_i)_{i\in I})$. C'est un isomorphisme affine. La famille formée de o est des $o + b_i, i \in I$ est un repère affine. Inversement on passe d'un repère affine à un repère catésien en privilégiant un des points du repère et en considérant tous les vecteurs d'origine ce point et d'extrémité un des autres points du repère. Nous allons voir qu'à un repère affine est associé un système de coordonnées dites coordonnées barycentriques.

A Enveloppe vectorielle

I Introduction

Définition I.1 Une enveloppe vectorielle $(\hat{\mathcal{E}}, j)$ d'un espace affine $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel auquel est associé une application affine injective $j : \mathcal{E} \to \hat{\mathcal{E}}$ telle que $j(\mathcal{E})$ est un hyperplan affine de $\hat{\mathcal{E}}$ qui ne contient pas 0.

On déduit de cette définition que j est un isomorphisme de $\mathcal{E}$ dans $j(\mathcal{E})$ et que $\operatorname{Vect} j(\mathcal{E}) = \hat{\mathcal{E}}$. Souvent on identifie $\mathcal{E}$ et $j(\mathcal{E})$.

Proposition I.1 *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine affine dirigé par E et soit o un point de $\mathcal{E}$. Si on pose $\hat{\mathcal{E}} = E \times \mathbf{K}$ et $j(p) = (\overrightarrow{op}, 1)$ alors $(\hat{\mathcal{E}}, j)$ est une enveloppe vectorielle de $\mathcal{E}$.*

II Isomorphismes entre enveloppes vectorielles

Proposition II.1 *Si* $(\hat{\mathcal{E}}_1, j_1)$ *et* $(\hat{\mathcal{E}}_2, j_2)$ *sont deux enveloppes vectorielles de l'espace affine* $\mathcal{E}$ *il existe un unique isomorphisme linéaire* $\phi : \hat{\mathcal{E}}_1 \to \hat{\mathcal{E}}_2$ *tel que* $j_2 = \phi \circ j_1$.

Ainsi l'enveloppe vectorielle d'un espace affine est unique à isomorphisme linéaire près.

III Une enveloppe vectorielle canonique

(voir exercice 6, TD 3) Soit $\mathcal{E}$ un espace affine dirigé par E. On suppose que $\mathcal{E}$ n'est pas réduit à un point. On note $E^{\mathcal{E}}$ l'espace vectoriel des applications de $\mathcal{E}$ dans E. Si $p \in \mathcal{E}$ on note $j(p)$ l'élément de $E^{\mathcal{E}}$ qui à $q \in \mathcal{E}$ associe $\overrightarrow{pq}$. On définit ainsi une application affine et injective j de $\mathcal{E}$ dans $E^{\mathcal{E}}$. On pose $\hat{\mathcal{E}} = \mathrm{Vect}\, j(\mathcal{E})$.

Proposition III.1 *Le couple* $(\hat{\mathcal{E}}, j)$ *est une enveloppe vectorielle associée à* $\mathcal{E}$.

IV Enveloppe vectorielle et repère affine

Soit $(\hat{\mathcal{E}}, j)$ une enveloppe vectorielle de l'espace affine $\mathcal{E}$.

Proposition IV.1 *Si* $\mathcal{F}$ *est un sous-espace affine de* $\mathcal{E}$ *alors* $j(\mathcal{F})$ *est un hyperplan affine de* $\mathrm{Vect}\, j(\mathcal{F})$.

Proposition IV.2 *Soit* P *une famille de points de* $\mathcal{E}$. *La famille* P *est une famille de points affinement indépendant si et seulement si* $j(P)$ *est une famille de vecteurs linéairement indépendants. C'est une famille affinement génératrice de* $\mathcal{E}$ *si et seulement si* $j(P)$ *est une famille génératrice de vecteurs de* $\hat{\mathcal{E}}$.

B Calcul barycentrique

I Introduction

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine dirigé par E, $p_1, \ldots, p_r \in \mathcal{E}$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbf{K}$. On pose $\lambda = \sum \lambda_i$.

Proposition I.1 *L'application* $q \in \mathcal{E} \mapsto \sum \lambda_i \overrightarrow{p_i q} \in E$ *est une application affine dont la partie linéaire est l'homothétie de rapport* λ. *Elle est constante si* $\lambda = 0$ *et c'est un isomorphisme si* $\lambda \neq 0$. *Il existe alors un unique point* m *tel que* $\sum \lambda_i \overrightarrow{p_i m} = 0$. *Ce point est dans le sous-espace affine engendré par les* p_i.

Définition I.1 Si $\lambda \neq 0$ l'unique point m tel que $\sum \lambda_i \overrightarrow{p_i m} = 0$ est appelé barycentre des $(p_i, \lambda_i)_{i=1,\dots,r}$ ou barycentre des p_i affectés des masses λ_i. Si les λ_i sont tous égaux on parle d'isobarycentre. Dans ce cas r n'est pas un multiple de la caractéristique de $\mathbf{K}$. Le milieu de deux points est l'isobarycentre de ces deux points.

Proposition I.2 *(homogénéité du barycentre) Si $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$ alors le barycentre des $(p_i, \lambda_i)_{i=1,\dots,r}$ est aussi le barycentre des $(p_i, \mu\lambda_i)_{i=1,\dots,r}$.*

Proposition I.3 *(associativité du barycentre) On suppose $\lambda \neq 0$. Soit $I_1, \dots, I_s$ une partition de $\{1, \dots, r\}$ telle que si $j = 1, \dots, s$, $\Lambda_j = \sum_{i \in I_j} \lambda_i \neq 0$. Pour $j = 1, \dots, s$ on note q_j le barycentre des $(p_i, \lambda_i)_{i \in I_j}$. Le barycentre de $(p_i, \lambda_i)_{i=1,\dots,r}$ est aussi le barycentre des $(q_j, \Lambda_j)_{j=1,\dots,s}$.*

Proposition I.4 *Le sous-espace affine engendré par une famille P de $\mathcal{E}$ est égal à l'ensemble des barycentres des sous-familles finies de P.*

Proposition I.5 *Une application $\mathcal{A} : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est affine si et seulement si pour toute famille $(p_i, \lambda_i)_{i=1,\dots,r}$ le barycentre des $(\mathcal{A}(p_i), \lambda_i)_{i=1,\dots,r}$ est l'image par $\mathcal{A}$ du barycentre des $(p_i, \lambda_i)_{i=1,\dots,r}$.*

II Coordonnées barycentriques

On suppose que $\mathcal{E}$ est de dimension n finie et soit $(p_i)_{i=0,\dots,n}$ un repère affine de $\mathcal{E}$. On note $\mathcal{H}$ l'hyperplan affine $\{\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1\}$ de $\mathbf{K}^{n+1}$.

Proposition II.1 *L'application θ qui à $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{H}$ associe le barycentre des $(p_i, \lambda_i)_{i=0,\dots,n}$ est un isomorphisme affine de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{E}$ et $(\mathbf{K}^{n+1}, \theta^{-1})$ est une enveloppe vectorielle de $\mathcal{E}$.*

Définition II.1 L'application θ^{-1} est appelée coordonnées barycentriques (par rapport au repère affine $(p_i)_{i=0,\dots,n}$).

Proposition II.2 *Le point m de coordonnées barycentriques $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{H}$ vérifie $\overrightarrow{p_0 m} = \sum \lambda_i \overrightarrow{p_0 p_i}$.*

Proposition II.3 *Soit $L \in \mathbf{K}^{n+1^*}$ une forme linéaire non nulle. Si $\ker L \neq \{\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 0\}$ alors l'ensemble des points p de coordonnées barycentriques dans $\ker L$ est un hyperplan affine. Tout hyperplan affine est de ce type.*

Définition II.2 L'équation $L = 0$ s'appelle équation barycentrique.

III Les droites du plan

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine et (p_0, p_1, p_2) un repère affine.

Proposition III.1 *Trois points m_0, m_1, m_2 sont alignés si et seulement si leur coordonnées barycentriques sont liées.*

Proposition III.2 *Soit m un point de coordonnées barycentriques (α, β, γ). Toute droite qui passe par m admet une équation barycentrique de la forme $l_0\lambda_0 + l_1\lambda_1 + l_2\lambda_3 = 0$ avec $l_0\alpha + l_1\beta + l_2\gamma = 0$.*

Proposition III.3 *Soit δ_0 et δ_1 deux droites de $\mathcal{P}$ distinctes et qui admettent comme équations barycentriques $L_0 = 0$ et $L_1 = 0$. Si $t \in \mathbf{K}$ alors $(1-t)L_0 + tL_1 = 0$ est l'équation barycentique d'une droite δ_t. Si $\delta_0 \parallel \delta_1$ alors $\delta_t \parallel \delta_0$ et toute droite δ parallèle à δ_0 est de la forme δ_t (pour un unique $t \in \mathbf{K}$) ou vérifie l'équation barycentrique $L_1 - L_0 = 0$ (δ_∞). Si δ_0 et δ_1 sont concourantes en un point p alors $p \in \delta_t$ et toute droite δ qui contient p est de la forme δ_t (pour un unique $t \in \mathbf{K}$) ou vérifie l'équation barycentrique $L_1 - L_0 = 0$ (δ_∞).*

Définition III.1 Dans les deux cas de la proposition, la famille $\delta_t, t \in \mathbf{K} \cup \{\infty\}$ s'appelle le faisceau de droites engendrées par δ_0 et δ_1.

4 Ceva, Menelaüs, Pappus, Desargues

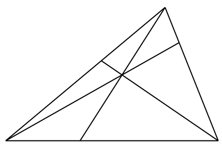
A Ceva et Menelaüs

I Ceva

Définition I.1 On appelle triangle un triplet de points affinement indépendants d'un espace affine.

Théorème I.1 *Soit a, b, c un triangle d'un plan affine et soit a', b' et c' trois autres points tels que $a' \in bc, b' \in ca$ et $c' \in ab$. Les droites aa', bb' et cc' sont concourantes ou parallèles si et seulement si*

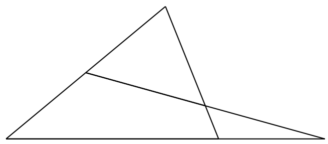
$$\frac{\overline{ba'}}{\overline{ca'}} \frac{\overline{cb'}}{\overline{ab'}} \frac{\overline{ac'}}{\overline{bc'}} = -1.$$



II Menelaüs

Théorème II.1 *Soit a, b, c un triangle d'un plan affine et soit a', b' et c' trois autres points tels que $a' \in bc, b' \in ca$ et $c' \in ab$. Les points a', b' et c' sont alignés si et seulement si*

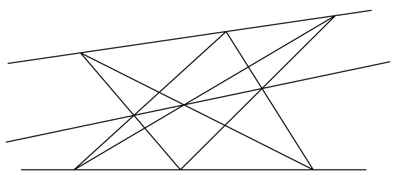
$$\frac{\overline{ba'}}{\overline{ca'}} \frac{\overline{cb'}}{\overline{ab'}} \frac{\overline{ac'}}{\overline{bc'}} = 1.$$



B Pappus et Desargues

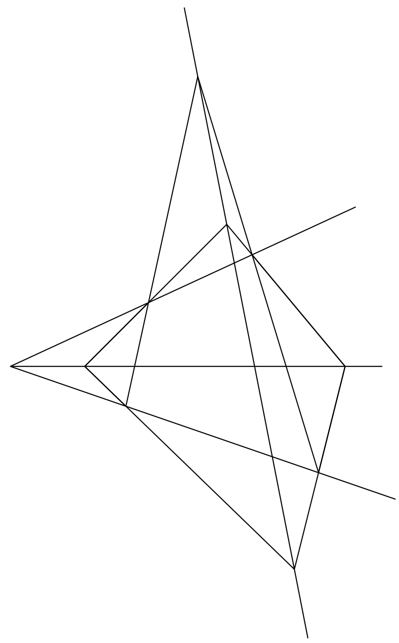
I Pappus

Théorème I.1 *Soient $\delta \neq \delta'$ deux droites distinctes d'un plan affine $\mathcal{P}$ et soient $a, b, c \in \delta$ et $a', b', c' \in \delta'$. Si ab' et ba' s'intersectent en un point γ, bc' et cb' s'intersectent en un point α et ca' et ac' s'intersectent en un point β alors α, β et γ sont alignés. Si ab' et ba' sont parallèles et bc' et cb' s'intersectent en un point α alors ca' et ac' s'intersectent en un point β différent de α et la droite $\alpha\beta$ est parallèle à ab' et ba'.*



II Desargues

Théorème II.1 *Soient $a_i, b_i, i = 1, 2, 3$ des points distincts. On suppose que a_1a_2 et b_1b_2 s'intersectent en c_3, a_2a_3 et b_2b_3 s'intersectent en c_1 et a_1a_3 et b_1b_3 s'intersectent en c_2. Alors les c_i sont alignés si et seulement si les droites a_ib_i sont parallèles ou concourantes.*



Définition II.1 Dans le cas où l'une des deux conditions équivalentes du théorème de Desargues est vérifiée les triangles a_1, a_2, a_3 et b_1, b_2, b_3 sont dits homologiques. La droite qui porte les c_i s'appelle l'axe d'homologie et le point de concours éventuel des droites $a_i b_i$ le centre d'homologie.

C Birapport

On suppose que $\mathbf{K}$ a au moins trois éléments.

I Introduction

Définition I.1 On ajoute un élément noté ∞ à $\mathbf{K}$ et on pose $\overline{\mathbf{K}} = \mathbf{K} \cup \{\infty\}$. On pose $\infty + \lambda = \lambda + \infty = \infty$ si $\lambda \in \mathbf{K}$. Si de plus $\lambda \neq 0$, on pose $\frac{\lambda}{\infty} = 0$ et $\frac{\lambda}{0} = \infty$.

Définition I.2 Une homographie est une application h de $\overline{\mathbf{K}}$ dans lui même de la forme $h(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ si $x \in \mathbf{K}$, $h(\infty) = \dfrac{\alpha}{\gamma}$ avec $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. L'ensemble des homographies est noté $PSL(\mathbf{K})$.

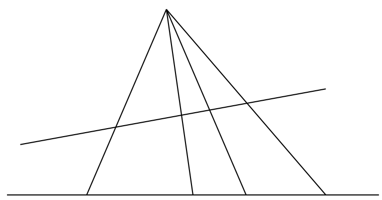
Définition I.3 Soit a, b, c, d quatre points distincts d'une droite affine δ. Le birapport $[a, b, c, d]$ de ces quatre points est $[a, b, c, d] = \dfrac{\overline{ac}}{\overline{bc}} \dfrac{\overline{bd}}{\overline{ad}}$.

II Propriétés

Proposition II.1 *Muni de la composition des applications, $PSL(\mathbf{K})$ est un groupe non commutatif qui agit simplement et transitivement sur les triplets de points différents de $\mathbf{K}$: étant donnés deux triplets (a_1,a_2,a_3) et (a'_1,a'_2,a'_3) de points distincts, il existe une unique homographie h telle que $h(a_i)=a'_i$.*

Proposition II.2 *Si a,b,c et d sont des éléments de $\mathbf{K}$ avec a,b,c distincts alors $[a,b,c,d]$ est l'image de d par l'homographie h telle que $h(a)=\infty, h(b)=0$ et $h(c)=1$.*

Proposition II.3 *Soit $\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4$ quatre droites distinctes d'un plan affine, concourantes en un point o, et soit Δ et Δ' deux droites qui évitent o. Si $i=1,2,3,4$ on pose $a_i=\delta_i\cap\Delta$ et $a'_i=\delta_i\cap\Delta'$. Alors $[a_1,a_2,a_3,a_4]=[a'_1,a'_2,a'_3,a'_4]$.*



Définition II.1 Le nombre $[a_1,a_2,a_3,a_4]$ qui ne dépend que des δ_i est appelé birapport $[\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4]$ des droites $\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4$.

5 Corps ordonnés, convexité, orientation

A Convexité

I Corps ordonné

Définition I.1 Un corps ordonné est la donnée $((\mathbf{K},+,\times),\leq)$ d'un corps commutatif $(\mathbf{K},+,\times)$ muni d'une relation d'ordre total $\leq$ compatible avec $+$ et $\times$. Ceci signifie que pour tout α,β,γ tels que $\alpha\leq\beta$ on a $\alpha+\gamma\leq\beta+\gamma$ et si de plus $0\leq\gamma$ alors $\alpha\times\gamma\leq\beta\times\gamma$. Les éléments inférieurs (resp. supérieurs) srictement à 0 sont dits négatifs (resp. positifs) strictement.

Exemple I.1 Le corps des rationnels et celui des réels sont des corps ordonnés.

Remarque I.1 Un corps ordonné est infini, il est de caractéristique nulle et il ne contient pas de racines d'éléments strictement négatifs.

Définitions I.2 On ajoute deux éléments $-\infty$ et $+\infty$ à $\mathbf{K}$ tels que $-\infty < a < +\infty$ pour tout $a \in \mathbf{K}$. On pose $\overline{\mathbf{K}} = \mathbf{K} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Si $a, b \in \mathbf{K}$ on pose $[a,b] = \{x \in \overline{\mathbf{K}} : a \leq x \leq b\}$, $[a,b[= \{x \in \overline{\mathbf{K}} : a \leq x < b\}$, $]a,b] = \{x \in \overline{\mathbf{K}} : a < x \leq b\}$ et $]a,b[= \{x \in \overline{\mathbf{K}} : a < x < b\}$. Ces ensembles sont appelés intervalles. L'intervalle $[a,b]$ est fermé, $[a,b[$ est un intervalle ouvert à droite, $]a,b]$ est un intervalle ouvert à gauche et $]a,b[$ est un intervalle ouvert. Si $a,b \in \mathbf{K}$ on dit que $[a,b]$ est un segment.

Proposition I.1 *Si $a < b$, $[a,b] = \{(1-t)a + tb : t \in [0,1]\}$, $[a,b[= \{(1-t)a+tb : t \in [0,1[\}$, $]a,b] = \{(1-t)a+tb : t \in]0,1]\}$ et $]a,b[= \{(1-t)a+tb : t \in]0,1[\}$.*

II Convexes d'un espace affine

Dans toute la suite on se place dans un espace affine $\mathcal{E}$ sur un corps ordonné $\mathbf{K}$. Ceux qui connaissent mal cette notion peuvent considérer que le corps $\mathbf{K}$ est $\mathbf{R}$ ou un sous-corps de $\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}$ par exemple.

Définition II.1 Un segment I de $\mathcal{E}$ est un sous-ensemble formés des barycentres de deux points donnés a et b de $\mathcal{E}$ affectés de masses positives. Les points a et b sont appelés extrémités de I et note $I = [a,b]$. On définit aussi $[a,b[$, $]a,b]$ et $]a,b[$.

Définition II.2 Un sous-ensemble C de $\mathcal{E}$ est dit convexe si pour tout couple $(a,b) \in C$ le segment $[a,b]$ appartient à C.

Exemples II.1 Tout sous-espace affine de $\mathcal{E}$ est convexe. Si $p_1, ..., p_r \in \mathcal{E}$ l'ensemble C des barycentres des p_i affectés de masses positives est convexe.

Définition II.3 On appelle combinaison convexe de $p_1, ..., p_r$ tout barycentre des p_i affectés de masses positives.

Proposition II.1 *L'intersection de convexes est convexe. La réunion d'une famille croissante de convexes est convexe.*

Définition II.4 On appelle enveloppe convexe d'un sous-ensemble X de $\mathcal{E}$ l'intersection $\mathrm{conv} X$ des convexes qui contiennent X.

Proposition II.2 *L'enveloppe convexe $\mathrm{conv} X$ d'un sous-ensemble X de $\mathcal{E}$ est égal à la réunion des combinaisons convexes des sous-familles finies de X.*

Théorème II.1 *(Carathéodory) Si $\dim \mathcal{E} = n < +\infty$ et si $X \subset \mathcal{E}$ alors pour tout $q \in \mathrm{conv} X$ il existe $p_0, ..., p_n$ et $\lambda_0, ..., \lambda_n \geq 0$ tels que q soit le barycentre des (p_i, λ_i).*

Proposition II.3 *Si $X \subset \mathcal{E}$ alors $< \mathrm{conv}(X) > = < X >$.*

Proposition II.4 *L'image et l'image réciproque d'un convexe par une application affine sont convexes.*

B Orientation

I Introduction

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension finie sur un corps ordonné $\mathbf{K}$. Soit E sa direction. On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des bases de E.

Définition I.1 Deux bases b et b' définissent la même orientation si le déterminant de la matrice des coordonnées des vecteurs de b' dans la base b est strictement positif.

Proposition I.1 *Définir la même orientation est une relation d'équivalence qui possède deux classes.*

Définitions I.2 Les deux classes d'équivalence pour la relation précédente s'appellent les orientations de E. Choisir une orientation de E c'est choisir une de ces classes. Une base est dite directe si elle appartient à l'orientation choisie, indirecte sinon. L'orientation de E induit sur $\mathcal{E}$ une orientation : un repère affine $(p_0,...,p_n)$ est dit direct si $(\overrightarrow{p_0p_1},...,\overrightarrow{p_0p_n})$ est directe.

Proposition I.2 *Soit $\mathcal{E}$ et* **F** *deux espace affines orientés de même dimension, dirigés par E et F. Soit $\mathcal{A}$ une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ et A sa partie linéaire. Le signe ε du déterminant de la matrice de A par rapport à des bases directes de E et F est indépendant de ces bases.*

Définition I.3 Avec les notations de la proposition, on dit que f respecte ou préserve l'orientation si $\varepsilon = +$.

Proposition I.3 *La composée de deux applications qui préservent l'orientaion préserve l'orientation.*

II Le résultat

Définition II.1 Une application f de $[0,1]$ dans $\mathcal{E}$ est affine par morceaux s'il existe des segments $I_1,...,I_s$ dont la réunion est $[0,1]$ et tels que f coïncide sur chacun d'eux avec une application affine.

Proposition II.1 *Soit $b = (e_1,...,e_n)$ et $b' = (e'_1,...,e'_n)$ deux bases directes. Il existe $t \in [0,1] \mapsto b(t) \in \mathcal{B}$ affine par morceaux telle que $b(0) = b$ et $b(1) = b'$.*

C Polyèdres convexes

I Généralités

On suppose que $\mathcal{E}$ est un espace de dimension finie.

Définitions I.1 Un polyèdre convexe (finiment engendré) C est l'enveloppe convexe d'un ensemble fini non vide de points X. La dimension de C est la dimension de $< C >$.

Proposition I.1 *Soit X un ensemble fini. Il existe un unique $X' \subset X$ tel que* $\operatorname{conv} X = \operatorname{conv} X'$ *et tel que si $X'' \subset X'$ et* $\operatorname{conv} X = \operatorname{conv} X''$ *alors $X'' = X'$.*

Définition I.2 Les points de X' s'appellent les sommets de $C = \operatorname{conv} X$.

Proposition I.2 *Soit X et X' comme précédemment. On suppose que* $\dim \operatorname{conv} X = n$*. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $p \in X$, $p \notin X'$ si et seulement pour tout $v \in E$* $[p, p + \varepsilon v] \in \operatorname{conv} X$.

Proposition I.3 *Soit $X = \{p_1, \dots, p_r\}$. Si* $\dim \operatorname{conv} X = n$ *il existe des demi-espaces $\mathcal{H}_1^+, \dots, \mathcal{H}_s^+$ bordés par des hyperplans $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_s$ tels que* $\operatorname{conv} X = \mathcal{H}_1^+ \cap \dots \cap \mathcal{H}_s^+$ *et* $(\operatorname{conv} X) \cap \mathcal{H}_i = \operatorname{conv}(X \cap \mathcal{H}_i)$ *est un polyèdre convexe de dimension $n - 1$.*

Définition I.3 Les convexes $\operatorname{conv}(X \cap \mathcal{H}_i)$ s'appellent les faces de $C = \operatorname{conv} X$.

II Les polyèdres convexes de $\mathbf{K}^2$ et $\mathbf{K}^3$.

Définitions II.1 Un polygône convexe est un polyèdre convexe de dimension 2 de $\mathbf{K}^2$. Ses faces sont appelées arêtes.

Proposition II.1 *Un polygône convexe possède autant de sommets que de faces.*

Définition II.2 Une arête d'un polyèdre C de dimension 3 de $\mathbf{K}^3$ est une face d'une face, cette dernière étant considérée comme polyèdre du plan affine qu'elle engendre.

Théorème II.1 *(Euler) Soit C un polyèdre de dimension 3 de* $\mathbf{K}^3$*. On note S le nombre de sommets de C, A le nombre d'arêtes et F le nombre de faces. Alors $F - A + S = 2$.*

6 Coniques affines

Dans ce chapitre on considère un corps $\mathbf{K}$ qui possède au moins cinq éléments, $\mathcal{E}$ désigne un espace affine de dimension 2 et E sa direction. On identifie l'enveloppe vectorielle $\hat{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{E}$ à $\mathbf{K}^3$, E à $\mathbf{K}^2 \times \{0\}$ et $\mathcal{E}$ à $\mathbf{K}^2 \times \{1\}$ où à $\mathbf{K}^2$.

A Introduction

I Cône et polynôme homogène

Définition I.1 On associe à $X \subset \hat{\mathcal{E}}$ le sous-ensemble $\hat{X}$ de $\hat{\mathcal{E}}$ défini par $\hat{X} = \{v = \lambda p : \lambda \in \mathbf{K}, p \in X\}$ et appelé cône de base X et de sommet 0.

Proposition I.1 *L'image $L(\hat{X})$ d'un cône $\hat{X}$ de base X par $L \in GL(\hat{\mathcal{E}})$ est un cône de base $L(X)$.*

Proposition I.2 *Si $X, X' \subset \hat{\mathcal{E}}$ alors $\widehat{X \cap X'} = \hat{X} \cap \hat{X}'$ et $\widehat{X \cup X'} = \hat{X} \cup \hat{X}'$.*

Remarque I.1 L'application $X \subset \hat{\mathcal{E}} \mapsto \hat{X}$ n'est pas injective mais sa restriction aux $X \subset \mathcal{E}$ l'est.

Définition I.2 On associe à $P = \sum_{i+j \leq d} p_{ij} x^i y^j \in \mathbf{K}[x,y]$ polynôme de degré d le polynôme homogène $\hat{P} = \sum_{i+j+k=d} p_{ij} x^i y^j z^k \in \mathbf{K}[x,y,z]$ qui est aussi de degré d.

Proposition I.3 *Si $P \in \mathbf{K}[x,y]$ et $\mathcal{A} \in GA(\mathbf{K}^2)$ alors $P \circ \mathcal{A}^{-1}$ est un polynôme de même degré et $\mathcal{A}(\{P = 0\}) = \{P \circ \mathcal{A}^{-1} = 0\}$. Si $Q \in \mathbf{K}[x,y]$ homogène et $L \in GL(\mathbf{K}^3)$ alors $Q \circ L^{-1}$ est un polynôme homogène de même degré et $L(\{Q = 0\}) = \{Q \circ L^{-1} = 0\}$.*

Remarque I.2 Le lieu des zéro d'un polynôme homogène est un cône.

Proposition I.4 *Si $P \in \mathbf{K}[x,y]$ alors $\{P = 0\} = \{\hat{P} = 0\} \cap \mathcal{E}$*

Remarque I.3 On n'a pas toujours $\{\widehat{P = 0}\} = \{\hat{P} = 0\}$ (prendre par exemple $P = 0$).

Définition I.3 Une forme quadratique est un polynôme homogène de degré 2. Son lieu d'annulation est une quadrique.

Proposition I.5 *Si $Q \in \mathbf{R}[x,y,z]$ homogène de degré 2 alors il existe $L \in GL(\mathbf{R}^3)$ tel que $\pm Q \circ L^{-1}$ est égal à à x^2, $x^2 \pm y^2$ ou $x^2 + y^2 \pm z^2$.*

Proposition I.6 *Si $Q \in \mathbf{C}[x,y,z]$ homogène de degré 2 alors il existe $L \in GL(\mathbf{C}^3)$ tel que $Q \circ L^{-1}$ est égal à à x^2, $x^2 + y^2$ ou $x^2 + y^2 + z^2$.*

II Conique

Définition II.1 Une conique affine C associée à un polynôme P de degré 2 de $\mathbf{K}[x,y]$ est le lieu des zéros de P.

Proposition II.1 *L'image (la contre-image) d'une conique affine par un isomorphisme affine est une conique affine.*

La classification des coniques dépend largement du corps $\mathbf{K}$.

Exemples II.1 Les coniques réelles associées aux polynômes $x^2+y^2+1, x^2+y^2, x^2, x^2-x, x^2-y^2, x^2-y, x^2+y^2-1, x^2-y^2-1$ sont respectivement le vide, un point, une droite double, deux droites parallèles, deux droites concourantes, une parabole, une ellipse, une hyperbole.

Théorème II.1 *Si C est une conique réelle, une et une seules des huit coniques précédentes est l'image de C par un automorphisme affine.*

Exemples II.2 Les coniques complexes associées aux polynômes $x^2, x^2-x, x^2-y^2, x^2-y, x^2+y^2+1$ sont respectivement une droite double, deux droites parallèles, deux droites concourantes, une une parabole, une conique *quelconque.*

Théorème II.2 *Si C est une conique complexe, une et une seules des quatre coniques précédentes est l'image de C par un automorphisme affine.*

Remarque II.1 Contrairement aux cas réel et complexe, la conique de $\mathbf{Q}^2$ associée au polynôme $2x^2-y^2$ est réduite à un point.

B Quelques propriétés remarquables

I Intersection avec une droite, paramétrisation

Remarque I.1 Dès qu'une conique contient trois points alignés, c'est soit une droite double, soit deux droites parallèles ou concourantes.

Proposition I.1 *Soient $a_0, \ldots, a_5$ cinq points distincts dont quatre d'entre eux ne sont jamais alignés. Il existe une et une seule conique qui passe par ces points.*

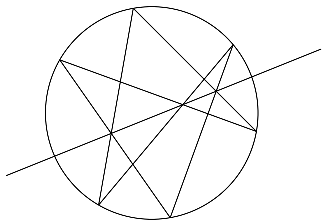
Remarque I.2 Soit C une conique non vide et soit $o \in C$. Si C ne contient pas de triplets de points alignés alors toute droite qui passe par C coupe $C \setminus \{o\}$ en au plus un point.

Proposition I.2 *Soit C une conique non vide qui ne contient pas de triplets de points alignés. À tout $o \in C$ est associée une paramétrisation rationnelle injective $t \mapsto \theta_o(t) = (x(t), y(t))$ de $C \setminus \{o\}$ telle que ${\theta_{o'}}^{-1} \circ \theta_o$ est une homographie.*

II Birapport et théorème de Pascal

Proposition II.1 *Soit C une conique non vide qui ne contient pas de triplets de points alignés et soit p_1, p_2, p_3, p_4 quatre points distincts de C. Alors le birapport $[p_1q, p_2q, p_3q, p_4q]$ est indépendant du point $q \in C$.*

Théorème II.1 *(Pascal) Soit C une conique non vide qui ne contient pas de triplets de points alignés et soient $a, b, c, a', b', c' \in C$. Si ab' et ba' s'intersectent en un point γ, bc' et cb' s'intersectent en un point α et ca' et ac' s'intersectent en un point β alors α, β et γ sont alignés.*



Chronologie

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/

```
Ahmes (17ème siècle avant J.-C.),        |   Germain (1776-1831),
Thalès (7ème siècle avant J.-C.),        |   Möbius (1790-1868),
Euclide (4ème siècle avant J.-C.),       |   Chasles (1793-1880),
Apollonius (3ème siècle avant J.-C.),    |   Bobillier (1798-1840),
Archimède (3ème siècle avant J.-C.),     |   Hamilton (1805-1865),
Menelaüs (1er siècle après J.-C.),       |   Grassmann (1809-1877),
Pappus (4ème siècle après J.-C.),        |   Galois (1811-1832),
Hypathie (370-415),                      |   Cayley (1821-1895),
al-Kashi (1380-1429),                    |   Cantor (1829-1920)
Copernic (1473-1543),                    |   Wedderburn(1842-1948),
Galilée (1564-1642),                     |   Cantor (1845-1918),
Kepler (1571-1630),                      |   Klein (1849-1925),
Snell (1580-1626)                        |  Kovalevskaya (1850-1891),
Desargues (1591-1661),                   |   Poincaré (1854-1912),
Descartes (1596-1650),                   |   Hilbert (1862-1943),
Pascal (1623-1662),                      |   Zermelo (1871-1953),
Newton (1643-1727),                      |   Carathéodory (1873-1953),
Céva (1647-1734),                        |   Noether (1882-1935)
Euler (1707-1783),                       |   Zorn (1906-1993),
Bezout (1730-1783),                      |   Coxeter (1907-2003),
Monge (1746-1818),                       |   Thom (1923-2002)
```