

Courbes et surfaces paramétrées

Résumé des séances

Version provisoire du 24 avril 2025

Le programme.

Courbes

Courbes régulières. Donner plusieurs exemples. Changement de paramètre admissible.

Vecteur tangent, longueur d'une courbe et abscisse curviligne.

Vecteur normal, courbure.

Produit vectoriel. Trièdre de Serret-Frénet et torsion.

Exemples de courbes en coordonnées polaires.

Surfaces

Surfaces régulières. Donner plusieurs exemples (surfaces de révolution).

Plan tangent, vecteur normal et application de Gauss. Première forme fondamentale et aire d'une surface.

L'évaluation. Elle sera réalisée en deux contrôles d'une heure et donnant les notes C_1 et C_2 , chacune sur 20, et un contrôle d'une heure et demie et donnant la note

C_3 , sur 20 également. La note finale F est donnée par la formule

$$F = \max \left(\min \left(\frac{C_1 + C_2}{2}; 10 \right); \frac{C_1 + C_2 + C_3}{3}; C_3 \right).$$

Les contrôles d'une heure auront lieu à 16h45 les 13/02 et 27/03 et le dernier contrôle, d'une heure et demie, aura lieu à 08h00 le 05/05.

07/01. (Prévisionnel: *Exemples d'application des théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites. Courbes paramétrées (régulières ou pas). C^k -équivalence, changement de paramètre admissible.*)

Le théorème d'inversion locale (en dimension finie) est énoncé et il est illustré par quelques exemples :

- la fonction sinus ;
- une fonction f du type $f(x) = \sin(x) + x^2 g(x)$ avec g de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$;
- la fonction $z \in \mathbf{C} \mapsto z^2 \in \mathbf{C}$ donnée par $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$ en coordonnées réelles ;
- la fonction $z \in \mathbf{C} \mapsto \exp(z) \in \mathbf{C}$ donnée par $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto \exp(x) \cdot (\cos(y), \sin(y))$ en coordonnées réelles.

Les deux derniers exemples sont l'occasion d'évoquer les similitudes directes.

Le théorème des fonctions implicites (en dimension finie) est donné. Il est expliqué comment déduire ce théorème de celui d'inversion locale.

Des exemples de base sont étudiés :

- la fonction définie par $f(x, y) = y - \alpha(x)$ où α est une fonction de classe C^k définie sur un intervalle ouvert ;
- les fonctions f_R définies par $f_R(x, y) = x^2 + y^2 - R^2$ associées aux cercles centrés à l'origine ;

- la fonction f définie par $f(x, y) = x^3 - y^2$ dont le niveau 0 est une cuspide (le dictionnaire de l'Académie française dit que c'est entre autre la *pointe raide et acérée qui se développe à l'extrémité des feuilles de certains végétaux* et il donne comme exemple l'ananas).

La définition de courbe paramétrée de classe C^k est donnée ($\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ de classe C^k avec I intervalle ouvert non vide). La définition de courbe régulière est aussi donnée (courbe paramétrée $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ de classe C^k avec $k \geq 1$ et telle que $\gamma'(t)$ n'est jamais nul). Le premier exemple proposé est celui d'une application affine de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^n$ donnée par $f(t) = A + tV$ avec $A \in \mathbf{R}^n$, $V \in \mathbf{R}^n$ et non nul et dont l'image est une droite. Le second exemple est l'application $t \in \mathbf{R} \mapsto (t^2, t^3)$ dont l'image est la cuspide d'équation $x^3 - y^2 = 0$. Le troisième exemple est celui de l'application $t \in \mathbf{R} \mapsto (t^3 - t, t^2)$. Le dernier exemple consiste à considérer de plusieurs façons un cercle unité $C = \{x^2 + y^2 = 1\}$ (ou une partie) comme image d'une courbe paramétrée :

- $\gamma :]-1, 1[\rightarrow \mathbf{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$ ($\gamma(-1, 1[) = C \cap \{y > 0\}$) ;
- $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ ($\gamma(\mathbf{R}) = C$) ;
- $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})$ ($\gamma(\mathbf{R}) = C \setminus \{(0, -1)\}$).

Ce dernier exemple est l'occasion de citer la notion de projection stéréographique bien utile pour faire des cartes qui conservent les angles et qui permettent de naviguer.

Certains des exemples ont été donnés avec Geogebra en début de séance.

Il est indiqué qu'une méthode due à Peano permet de construire une application continue et surjective d'un intervalle dans le carré $[0, 1]^2$.

La définition de C^k -équivalence (avec $k \geq 1$) est donnée (les courbes paramétrées $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ et $\Gamma : J \rightarrow \mathbf{R}^n$ de classe C^k sont C^k -équivalentes si et seulement s'il

existe $\theta : I \rightarrow J$ difféomorphisme C^k tel que $\gamma = \Gamma \circ \theta$ (θ est un changement de paramètre admissible) et il est indiqué que cette relation est une relation d'équivalence dont les classes s'appellent arcs géométriques (de classe C^k).

14/01. (Prévisionnel: C^k -équivalence. Vecteur tangent. Exemples.)

On revient rapidement sur la paramétrisation rationnelle du cercle et on explique ce que sont les projections stéréographiques de pôles Sud et Nord en indiquant leur intérêt en navigation. C'est l'occasion d'évoquer Hipparque (environ -190, -120), sa liste d'étoiles et de mentionner son implication dans l'histoire des projections stéréographiques.

On précise que les théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites qui avaient été énoncés en se plaçant à l'origine pour la source et le but peuvent être énoncés sans contrainte sur le point à la source et sur son image pourvu que les conditions de rang soient vérifiées.

On établit un énoncé d'immersion locale. Plus précisément on considère une application f de classe C^k (avec $k \geq 1$) définie sur un ouvert U de $\mathbf{R}^p$ et à valeurs de $\mathbf{R}^{p+q}$. On écrit f sous la forme $f = (g, h)$ avec g à valeurs dans $\mathbf{R}^p$ et h dans $\mathbf{R}^q$. On suppose que $f(0) = 0$ et que le rang de $dg(0)$ est p . Alors on prouve que quitte à restreindre U il existe $\phi : V \rightarrow \mathbf{R}^q$ de classe C^k défini sur V ouvert égal à $g(U)$ tel que $f(U) = \{(X, \phi(X)) | X \in V\}$.

C'est l'occasion de donner une signification à l'expression "quitte à restreindre".

On illustre cet énoncé d'immersion locale avec les courbes paramétrées de classe C^k (avec $k \geq 1$) et régulières, ayant éventuellement des points multiples.

On précise que si $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ est une courbe paramétrée de classe C^k (avec $k \geq 1$) alors $\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t))$ est appelé vecteur tangent à γ en $\gamma(t)$.

On rappelle dans la séance la notion de courbe régulière de classe C^k et ce que signifie qu'une courbe paramétrée de classe C^k est C^k -équivalente à une autre et on montre que cette relation est une relation d'équivalence. On revoit ainsi les notions de réflexivité, de transitivité et de symétrie sur l'exemple.

On définit ce qu'est la longueur d'un arc paramétré : si $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ est une courbe paramétrée de classe C^k (avec $k \geq 1$) et si $a < b$ sont deux réels de l'intervalle I alors $l(\gamma, a, b)$, la longueur d'arc paramétré associé à γ entre a et b , est donnée par

$$l(\gamma, a, b) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

On s'assure que si $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ est donnée par $\gamma(t) = tA + (1 - t)B$ (paramétrisation barycentrique de la droite passant par $A \in \mathbf{R}^n$ et $B \in \mathbf{R}^n$) alors

$$l(\gamma, 0, 1) = \|\overrightarrow{AB}\|.$$

On vérifie très rapidement que si $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ est donnée par $\gamma(t) = (R \cos(t), R \sin(t))$ (paramétrisation angulaire du cercle centré à l'origine de $\mathbf{R}^2$) et si $a < b$ sont deux réels alors

$$l(\gamma, a, b) = R(b - a).$$

21/01. (Prévisionnel: *Tracé de courbe (méthode). Rappel sur l'uniforme continuité. Longueur d'une courbe et abscisse curviligne (géométrie différentielle et limite d'arcs polygonaux).*)

La séance est consacrée à la preuve du résultat suivant : soit $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ une courbe

paramétrée de classe C^k avec $k \geq 1$ et soit $a, b \in I$ avec $a < b$. Alors

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k+1}^n)\|$$

où $t_k^n = a + \frac{k}{n}(b - a)$ si $k = 0, \dots, n - 1$.

Comme la preuve utilise le fait qu'une fonction définie sur un segment et à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ est uniformément continue si elle est continue des rappels sur la continuité uniforme sont faits. Il est en particulier montré que la fonction x^2 définie sur $\mathbf{R}$ n'est pas uniformément continue. Il est expliqué comment on peut déduire du théorème des accroissements finis qu'une fonction numérique C^1 définie sur un segment est uniformément continue.

Pour prouver le résultat principal de la séance on montre en plusieurs étapes que si $\varepsilon > 0$ alors il existe un rang N tel que si $n \geq N$ alors pour tout $k = 0, \dots, n - 1$ on a

$$\int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} \|\gamma'(t)\| dt \geq \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k+1}^n)\| \geq \int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} \|\gamma'(t)\| dt - \varepsilon \frac{|t_k^n - t_{k+1}^n|}{|b - a|}.$$

En sommant sur k variant de 0 à $n - 1$ on obtient que si $n \geq N$ alors

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \geq \sum_{k=0}^{n-1} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k+1}^n)\| \geq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt - \varepsilon.$$

Ceci établit bien le résultat de convergence annoncé.

28/01. (Prévisionnel: *Paramétrisation par l'abscisse curviligne. Vecteur normal, courbure.*)

On définit ce qu'est une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne et comment, à partir d'une courbe paramétrée et de classe C^1 , obtenir une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne définissant le même arc géométrique.

On définit aussi ce qu'est la courbure d'une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne de classe C^2 et comment définir naturellement le vecteur normal à une telle courbe paramétrée dès que $\gamma''(t)$ n'est pas nul.

On explique dans le cas de la dimension 2 et sous réserve d'avoir orienté l'espace comment il est possible de définir pour toute valeur du paramètre un vecteur normal unitaire privilégié d'une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne.

La notion d'orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie est donnée et il est expliqué pourquoi définir la même orientation est une relation d'équivalence qui possède exactement deux classes.

Quelques indications sur le contrôle du 13 février sont données. Le contrôle se compose de trois exercices, deux à 6 point et un à 8 points. Il est nécessaire de savoir définir ce qu'est une courbe paramétrée (et d'en reconnaître une ainsi que ses points doubles), ce qu'est la longueur d'arc (et de la calculer dans un cas concret), comment caractériser la colinéarité de deux vecteurs, comment calculer la dérivée de la réciproque d'une fonction, comment utiliser le théorème des accroissements finis dans une situation géométrique donnée. Il est indiqué sommairement que dans le troisième exercice il sera demandé d'établir qu'une hélice peut illustrer que le théorème des accroissements finis est faux en dimension 3 (il s'agira de montrer que si $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$ est donnée par $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ et si $a < b$ sont deux réels il n'existe pas $c \in \mathbf{R}$ tel que $\gamma'(c)$ et $\gamma(b) - \gamma(a)$ soient colinéaires).

30/01. (Prévisionnel: *Exemple avec Geogebra. Courbure et application de Gauss. Courbure totale.*)

En début de séance est expliqué pourquoi, alors qu'aujourd'hui le concept de submersion est récupéré pour surfer sur des idées non inclusives, c'est en

mathématiques, en particulier dans le domaine qui généralise l'étude des courbes et surfaces paramétrées, une belle idée, riche et positive.

Ensuite une preuve de la formule de dérivation d'un produit scalaire de deux applications vectorielles de la variable réelle est donnée :

$$\langle f, g \rangle' = \langle f', g \rangle + \langle f, g' \rangle .$$

Geogebra est utilisé pour illustrer le contre-exemple du théorème des accroissements finis en dimension 3 ([le fichier](#)).

Ce logiciel est aussi utilisé pour tracer une courbe paramétrée qui a un point double ([le fichier](#)) puis pour montrer une famille à un paramètre de courbes paramétrées ([le fichier](#)).

Au moment de diviser par 2 il est expliqué la notion de caractéristique d'un corps.

La notion d'angle orienté est évoqué et il est expliqué pourquoi une telle notion est une notion plane qui ne s'étend pas à $\mathbf{R}^3$. Il est signalé que la trace d'une matrice de rotation de $\mathbf{R}^3$ permet de calcul le cosinus de l'angle (non orienté) de cette rotation.

Les notions de vecteur normal à une courbe paramétrées (de classe au moins C^2 puisqu'on dérive deux fois) et celle de courbure sont étudiées. Les calculs sont faits dans le cas d'un cercle de rayon R paramétré par l'abscisse curviligne et il est établi que la courbure est l'inverse du rayon.

06/02. ([Prévisionnel: Produit vectoriel. Trièdre de Serret-Frénet et torsion.](#))

En début de séance on s'intéresse aux isométries de $\mathbf{R}^n$ (euclidien, muni du produit scalaire classique). Les propriétés des courbes comme la longueur ou la courbure sont invariantes par isométries (qui sont les applications f de $\mathbf{R}^n$ dans lui-même qui vérifient $\|f(u) - f(v)\| = \|u - v\|$) ou par changement de coordonnées

orthonormales. Aussi on précise que les isométries sont des applications affines. Ce résultat est une conséquence de l'égalité (établie en séance)

$$\langle u; v \rangle = \frac{1}{2}(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2) \text{ si } u, v \in \mathbf{R}^n.$$

En effet, après avoir montré qu'il suffisait de considérer des isométries qui fixent l'origine, en appliquant cette égalité à u et $-v$ (en cours on a voulu partir à tort de u et v et donc de $u + v$) et à $f(u)$ et $f(v)$ où f est une isométrie qui fixe l'origine, on obtient

$$\begin{aligned} -\langle u; v \rangle &= \frac{1}{2}(\|u - v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|f(u) - f(v)\|^2 - \|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2) \\ &= -\langle f(u); f(v) \rangle \end{aligned}$$

puisque $\|f(u) - f(v)\| = \|u - v\|$ (car f est une isométrie) et $\|f(u)\| = \|u\|$ et $\|f(v)\| = \|v\|$ (car $f(0) = 0$ et f est une isométrie). Ceci implique qu'une telle isométrie conserve le produit scalaire.

Ensuite on définit l'application de Gauss comme l'application

$$\gamma' : I \rightarrow S_{n-1} = \{\|x\|^2 = 1\}$$

qui, si $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ est une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne, à $t \in I$ associe le vecteur unitaire tangent à γ , vecteur qui appartient à S_{n-1} , la sphère unité de $\mathbf{R}^n$. On illustre cette notion à l'aide d'un dessin.

On définit la courbe totale de la courbe paramétrée par l'abscisse curviligne γ entre a et b dans I comme la longueur de l'arc de courbe γ' entre a et b c'est à dire

comme étant égale à $\int_a^b ||\gamma''(t)|| dt$ ou encore comme étant égale à l'intégrale de la courbure $\int_a^b |K|(t) dt$.

Quand $n = 2$ on définit aussi la courbure algébrique totale de γ entre a et b dans I comme l'intégrale $\int_a^b K(t) dt$ où $K(t)$ est la courbure algébrique. Cette courbure algébrique est donnée par $K(t) = \langle \gamma''(t), n(t) \rangle$ où $n(t)$ est le vecteur unitaire orthogonal à $\gamma'(t) = u(t)$ tel que $(u(t), n(t))$ soit une base orthonormale directe de $\mathbf{R}^2$ (orienté).

On calcule la courbure algébrique totale entre 0 et $2\pi n$ de $\gamma_n : [0, 2\pi n] \rightarrow \mathbf{R}^2$ donnée par $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$.

On fait un rappel sur la notion de produit vectoriel de $n - 1$ vecteurs de $\mathbf{R}^n$ en indiquant que le produit vectoriel $v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}$ est l'unique vecteur de $\mathbf{R}^n$ tel que si $w \in \mathbf{R}^n$ alors

$$\det(v_1, \dots, v_{n-1}, w) = \langle v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}; w \rangle .$$

On donne les propriétés de base du produit vectoriel et on donne une formule explicite pour calculer le produit vectoriel de deux vecteurs de $\mathbf{R}^3$.

On définit la courbure (et la courbure algébrique en dimension 2) d'une courbe Γ non nécessairement paramétrée par l'abscisse curviligne et on donne sans démonstration les formules suivantes

$$|K| = \frac{||\Gamma' \wedge \Gamma''||}{||\Gamma'||^3}$$

et, en dimension 2,

$$K = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pour le premier contrôle continu il est recommandé de travailler les points suivants :

- savoir définir ce qu'est une courbe paramétrée de classe C^k avec $k \geq 1$;
- savoir reconnaître lorsqu'une courbe paramétrée de classe C^1 est donnée, si elle est régulière et savoir calculer ses vecteurs tangents ;
- savoir trouver les point doubles d'une courbe paramétrée dans une situation élémentaire donnée ;
- savoir définir la longueur d'arc $\text{longueur}(\gamma, a, b)$ entre a et b d'une courbe paramétrée γ ;
- savoir calculer une telle longueur d'arc dans un cas relativement simple (où l'expression à intégrer est la racine d'un carré d'un polynôme) ;
- savoir la formule qui donne la dérivée de la fonction $f \circ g^{-1}$ en fonction de f' , g' et de la réciproque g^{-1} de g ;
- savoir utiliser le théorème des accroissements finis des fonctions numériques de la variable réelle ;
- savoir reconnaître une situation de colinéarité en dimension 2 ;
- savoir calculer les vecteurs tangents à une hélice donnée par

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t);$$

- savoir reconnaître une situation de non colinéarité en dimension 3.

13/02. Premier contrôle continu (16h45-17h45 + 20 minutes pour tiers-temps).

25/02. (Prévisionnel: *Coordonnées polaires, cylindrique, sphériques. Synthèse des séances sur les courbes.*)

La formule

$$|K| = \frac{\|\Gamma' \wedge \Gamma''\|}{\|\Gamma'\|^3}$$

qui donne la courbure lorsque Γ est une courbe paramétrée régulière quelconque et, en dimension 2,

$$K = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

sont établies.

La définition du trièdre de Serret-Frenet pour une courbe paramétrée C et bi-régulière est donnée. On explique comme il se construit grâce au classique procédé d'orthogonalisation de Gramm-Schmidt. La torsion est définie et les formules

$$\tau = \langle \vec{n}', \vec{b} \rangle = - \langle \vec{n}, \vec{b}' \rangle$$

et

$$\tau = \frac{\langle \Gamma' \wedge \Gamma'', \Gamma''' \rangle}{\|\Gamma' \wedge \Gamma''\|^2}$$

sont données sans démonstration.

Les formules donnant la courbure et la torsion sont appliquées (via un manuscrit projeté) en $t = 0$ lorsque Γ est donnée par (t, t^2, t^3) puis par $(t, \lambda t^2)$ ainsi que par $(R \cos(t), R \sin(t))$ et $(R \cos(t), R \sin(t), Rt)$.

Les coordonnées polaires, cylindriques et sphériques sont rapidement évoquées. Des exemples de cercles, de coniques, de droites et de spirales donnés en coordonnées polaires sont présentés.

Les points singuliers d'une courbe paramétrée sont examinés et pour de tels points les notions de point de rebroussement (première et deuxième espèces), de point d'inflexion et de point ordinaire sont discutées. Il est montré que si γ est de la forme $(\alpha t^p + \dots, \beta t^p + \dots)$ avec $\alpha \neq 0$ on peut faire un changement orthonormal de coordonnées de telle sorte que γ s'écrive dans les nouvelles coordonnées sous la forme $(\mu t^p + \dots, \nu t^q + \dots)$ avec $\mu \neq 0$ et $q > p$.

Pendant la séance la définition d'être de classe C^k (toutes les dérivées jusqu'à l'ordre k existent et sont continues) est rappelée et il est donné un exemple de fonction dérivable mais pas C^1 ainsi qu'un exemple de fonction C^∞ dont toutes les dérivées à l'origine sont nulles mais qui n'est pas constante.

04/03. (Prévisionnel: *Surfaces paramétrées, surfaces régulières et singulières.*)

En début de séance on étudie, lorsque $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ est une courbe régulière et paramétrée par l'abscisse curviligne, l'application Γ de $I \times \mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^2$ définie par $\Gamma(t, s) = (x(t) - sy'(t), y(t) + sx'(t))$ si $\gamma = (x, y)$. On montre que les couples (t, s) pour lesquels le rang de $d\Gamma$ n'est pas 2 sont les couples $(t, R(t))$ où $R(t)$ est le rayon de courbure de γ en t . Après avoir discuté de l'interprétation de la tangente du graphe d'une fonction en un point $(a, f(a))$ comme étant, parmi les droites qui passent par ce point, la "plus proche" de la courbe, le rayon de courbure est interprété comme étant le rayon du cercle le "plus proche" de la courbe (le cercle osculateur peut-on trouver dans la littérature mathématique) au point considéré. On explique à partir de l'application Γ ce qu'est le voisinage tubulaire d'une courbe plane et on indique (sans démonstration) que son aire est $2lr$ où l est la longueur de l'arc paramétré considéré et r le rayon du voisinage tubulaire considéré (r étant supposé petit et en tout cas inférieur à tous les rayons de courbure).

Dans la deuxième partie de la séance on projette tout d'abord plusieurs surfaces en s'attardant plus ou moins sur certaines d'entre elles (sphère, cône, cylindre, caténoïde, hyperboloïde à une nappe, oeuf, oreiller, selle, fronce, parapluie de Whitney) puis on définit ce qu'est une surface paramétrée et on énonce que le lieu des zéros d'une fonction C^1 définie sur un ouvert de $\mathbf{R}^3$ est localement une surface paramétrée dès que la fonction est partout de rang 1. On définit ce que sont le lieu

singulier et les valeurs singulières d'une surface paramétrée lorsque le rang n'est pas partout 2. On définit aussi le lieu singulier d'une surface définie comme le lieu des zéros d'une fonction lorsque cette dernière n'est pas de rang partout égal à 1. On conclut cette partie en faisant une étude assez détaillée du parapluie de Whitney donné soit comme le lieu d'équation $zy^2 - x^2$ soit comme l'image de l'application de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^*$ dans $\mathbf{R}^3$ définie par $f(x, y) = (x, y, \frac{x^2}{y^2})$ à laquelle il faut ajouter l'axe Oz .

11/03. (Prévisionnel: *Exemples. Plan tangent. Vecteur normal. Application de Gauss. Ruban de Möbius. Sphère. Projection stéréographique.*)

La première partie de la séance est consacrée à la résolution de deux exercices directement inspirés du prochain contrôle. On explique partir de l'exemple de la courbe paramétrée γ donnée par $\gamma(t) = (\cos^2(t), \sin^3(t), t)$ comment montrer qu'une courbe paramétrée est birégulière et comment calculer sa courbure et sa torsion en $t = 0$. On considère aussi un ensemble du type $S = \{x^2 - y^2 + z = 1\}$ et on explique pourquoi c'est une surface régulière (car image réciproque de 1 par une application f qui est C^1 et de rang 1 en tout point) et un sous-ensemble fermé (car image réciproque d'un fermé par une application continue) et non compact (car non borné). Puis on cherche les points M de S en lesquels le plan tangent $T_M S$ à S c'est à dire le noyau de $df(M)$ est égal au noyau d'une forme linéaire donnée. Dans la seconde partie on précise les notions de plan tangent (dans le cas d'une surface régulière puis dans le cas d'une surface paramétrée), de vecteur normal et d'application de Gauss.

Enfin, on illustre ces notions avec l'exemple de la sphère de rayon R centrée à l'origine, on explique d'abord avec un feuille de papier puis avec Geogebra ce qu'est le ruban de Möbius et on conclut en projetant une représentation de la bouteille de

Klein, toujours avec Geogebra.

18/03. (Prévisionnel: *Quelques rappels. Bouteille de Klein et Ruban de Möbius. Exemple de surface réglée.*)

Grace à Geogebra, on escamote au cours de la séance une présentation de la bouteille de Klein, du ruban de Möbius et d'un exemple de surface réglée.

L'essentiel de la séance consiste à établir deux résultats, un d'analyse et un de géométrie, puis d'expliquer comment les utiliser dans le troisième exercice du contrôle de la semaine prochaine.

Le résultat d'analyse est la continuité de la fonction $s \in \mathbf{R} \mapsto F(s) = \int_0^L f(r, s) dr$ si $f : [0, L] \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction continue. Ce résultat est prouvé à partir de l'énoncé suivant, de type "continuité uniforme", qu'on établit en ayant recours au théorème de Bolzano-Weierstrass : si $f : [0, L] \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est continue alors pour tout $a \in \mathbf{R}$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que si $r \in [0, L]$ et $b \in \mathbf{R}$ alors $|f(r, b) - f(r, a)| < \varepsilon$ dès que $|b - a| < \eta$.

Le résultat de géométrie est le suivant. Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur un intervalle I , soit $a \in I$ et soit $M \in S^1 = \{x^2 + y^2 = 1\}$ le cercle unité. Alors il existe une unique courbe paramétrée $\gamma : I \rightarrow S^1$ de classe C^1 dont les fonctions coordonnées $t \in I \mapsto x(t)$ et $t \in I \mapsto y(t)$ vérifient

$$\gamma'(t) = (x'(t), y'(t)) = f(t) \cdot (-y(t), x(t))$$

quel que soit $t \in I$. La preuve de l'existence est faite, celle de l'unicité est esquissée.

La séance se termine par une présentation rapide de l'énoncé du troisième exercice du contrôle de la semaine prochaine. On donne quelques pistes pour le résoudre. En particulier on explique pourquoi le théorème des valeurs intermédiaires permet de

conclure qu'une fonction continue de $\mathbf{R}$ dans $K\mathbf{Z}$ avec $K > 0$ est nécessairement constante.

25/03. (Prévisionnel: *Singularités d'une surface.*)

On donne les définitions d'immersion, de submersion et de plongement. On illustre graphiquement la notion d'immersion et celle de plongement.

Ensuite on définit ce qu'est une sphère de rayon R et de centre $a \in \mathbf{R}^n$. Dans le cas de la sphère unité de $\mathbf{R}^3$ on explicite les projections stéréographiques π_S de Pôle Sud et π_N de Pôle Nord. On montre que l'application $\pi_S \circ \pi_N^{-1}$ est une inversion et que sa différentielle en un point quelconque de $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ est une similitude indirecte (elle conserve les angles non orientés mais inverse l'orientation).

Enfin on explique que localement, quitte à choisir de façon ad hoc un repère affine euclidien, une surface C^2 est le graphe d'une application de la forme

$$f(x, y) = ax^2 + by^2 + \|(x, y)\|^2 \varepsilon(x, y) \text{ avec } \lim_0 \varepsilon = 0.$$

On conclut la séance en projetant des exemples de graphe de $ax^2 + by^2$ suivant les signes de a et b .

27/03. Deuxième contrôle continu (16h45-17h45 + 20 minutes pour tiers-temps).

01/04. (Prévisionnel: *Première forme fondamentale.*)

Les copies du deuxième contrôle sont rendues en début de séance.

La première partie de la séance est consacrée à la définition de la première forme fondamentale d'une surface régulière en un de ses points. On explique comment elle peut être calculée lorsque la surface est donnée comme une surface paramétrée et on indique comment l'utiliser (de façon théorique) pour calculer la longueur d'un morceau de courbe appartenant à la surface et pour calculer une aire.

Ensuite on explique pourquoi la projection cylindrique d'une sphère sur un cylindre

conserve les aires. On reprend aussi l'étude de la projection stéréographique et on montre que cette projection conserve les angles.

Enfin on établit que la surface réglée engendrée par rotation de la droite $x = 1, z = y$ autour de l'axe Oz donné par $x = y = 0$ est un hyperboloïde à une nappe d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

22/04. (Prévisionnel: *Aire d'une surface. Seconde forme fondamentale. Courbures de Gauss et moyenne. Points elliptiques, paraboliques, hyperboliques et ombilics.*)

On reprend la démonstration du fait que la rotation de la droite $x = 1, z = y$ autour de l'axe Oz donné par $x = y = 0$ est contenue dans l'hyperboloïde à une nappe d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

On poursuit l'étude de la première forme fondamentale. On montre que si A et B sont deux points non diamétralement opposés de la sphère unité de $\mathbf{R}^3$ alors le petit arc de grande cercle qui relie ces deux points est l'unique géodésique (courbe de plus petite distance) qui les relie.

On explique comment calculer l'aire d'une surface en utilisant la première forme fondamentale. On donne deux applications de ce résultat. La première consiste à calculer l'aire d'un tore. La seconde consiste à calculer l'aire d'une calotte sphérique de rayon r de la sphère unité, à vérifier qu'elle est strictement plus petite que l'aire d'un disque plan de même rayon, puis à conclure qu'on ne peut aplatir en respectant les distances une calotte sphérique sur un plan.

29/04. (Prévisionnel: *Synthèse des séances sur les surfaces.*)

05/05. Dernier contrôle (08h-09h30 + 30 minutes pour tiers-temps).