Université de Rennes 1
UFR Mathématiques
2024-2025

Parcours d'Accès Spécifique Santé (PASS)
Option Mathématiques

Analyse

Résumé des séances

(version du 2 avril 2025)

Programme

Nombres complexes
Définition de l'ensemble des nombres complexes. Parties réelle et imaginaire. Module. Argument. Équations du second degré à coefficients complexes. Racines énièmes. Exponentielle complexe et applications à la trigonométrie. Utilisation des nombres complexes en géométrie plane. Définitions (via les nombres complexes) : similitude, isométrie, translation, rotation, réflexion, symétrie glissée. Définition des angles orientés et non orientés. Mesure d'un angle orienté.
Fonctions réelles (techniques fondamentales de calcul en analyse)
Fonctions classiques : polynômes (et leur division euclidienne), fractions rationnelles, logarithme, exponentielle, fonctions trigonométriques et trigonométriques hyperboliques. Limites de suites et de fonctions, continuité, dérivabilité : étude des propriétés classiques (propriétés algébriques (y compris avec composition et passage à l'inverse), comparaison, adjacence, valeurs intermédiaires, extrema, accroissements finis, variations...). Fonctions de 2 ou 3 variables : définition, continuité, composition, dérivées partielles.
Primitives et intégrales
Quelques primitives classiques. Intégration par partie. Changement de variable. Linéarité de l'intégration. Lien entre intégrale et primitive. Application à la définition du logarithme et de l'exponentielle.

Règles d'évaluation

Pour l'UE Maths-Analyse l'évaluation passe par deux contrôles continus de 90 minutes.

Il est prévu que les contrôles continus aient lieu à 10h15 le 26 février et le 02 avril.

La note finale pour Maths-Analyse sera la moyenne des deux notes obtenues ou la note de la deuxième épreuve si celle-ci est supérieure à celle de la première.

Déroulement des séances

08/01. Au cours de cette séance on étudie quelques propriétés des ensembles $\mathbf{N}$ des entiers naturels, $\mathbf{Z}$ des entiers relatifs, $\mathbf{D}$ des décimaux, $\mathbf{Q}$ des rationnels et $\mathbf{R}$ des réels.

On explique que ces ensembles sont munis de lois (lois de composition internes), l'addition et la multiplication, qui sont commutatives et associatives. Ces lois possèdent chacune un élément neutre, 0 pour l'addition, 1 pour la multiplication. Le nombre 0 est absorbant pour la multiplication.

On signale aussi que **N** est inclus dans **Z** qui est inclus dans **D** qui est inclus dans **Q** qui est inclus dans **R**.

On précise enfin qu'une équation d'inconnue x du type $a+x=b$ n'a pas toujours de solution dans **N** mais a toujours une et une seule solution dans **Z** (et aussi dans **D**, **Q** et **R**). De même l'équation d'inconnue x du type $a \times x = b$ (avec $a \neq 0$) n'a pas toujours de solution dans **N** ou **Z** mais a toujours une et une seule solution dans **Q** (et aussi dans **R**).

On explique que la soustraction ou la division ne sont pas à considérer comme des lois de composition internes mais plutôt comme la résolution d'équations du type $a+x=b$ ou $a \times x = b$.

On discute des relations entre les notions d'entiers naturels et de cardinaux (d'ensembles finis en particulier).

On explique qu'on dit que deux ensembles E et F ont même cardinal si et seulement s'il existe une bijection de l'un dans l'autre, autrement dit si et seulement s'il existe une application f de E dans F tel que si y est un élément de F il existe un et un seul élément x de E tel que $f(x)=y$. Un cardinal revient à considérer tous les ensembles qui ont "même cardinal".

On montre pourquoi les ensembles **N**, **Z**, $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ et **Q** ont même cardinal. C'est l'occasion (quand il s'agit de construire une bijection entre **N** et **Q**) d'évoquer de crible d'Ératosthène (environ -276, -194). C'est aussi l'occasion d'une digression sur Hypathie (environ 355, 415), mathématicienne assassinée car trop progressiste. Lorsqu'on construit une bijection entre $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ et **N** on utilise le fait que

$$1+2+...+n = \sum_{k=1}^{n} = \frac{n(n+1)}{2}$$

et on donne la méthode que, selon une légende a priori non vérifiée, Gauss (1777, 1855) propose pour établir cette égalité.

On donne aussi la méthode de Cantor (1845, 1918) qui permet de montrer qu'il n'existe pas de bijection de **N** dans l'ensemble des réels compris strictement entre 0 et 1 après avoir expliqué que l'application qui à t dans $]-1,1[$ associe $\tan -\frac{\pi}{2}t)$ était une bijection entre $]-1,1[$ et **R**. On a aussi montré comment construire une bijection entre $]0,1[$ et $]-1,1[$ en s'appuyant sur un argument géométrique en lien avec le théorème de Thales (-624, -547).

On discute de l'écriture des nombres en base deux plutôt qu'en base dix. C'est l'occasion de signaler que les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 sont des idéogrammes. On donne l'écriture de quelques nombres en base deux (314, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 15, 11) et on calcule (avec erreurs, mea culpa, le produit de 15 par 11 en passant par leurs écritures en base deux (comme des ordinateurs).

On explique que le nombre de sous-ensembles d'un ensemble à n éléments compte 2^n éléments et après avoir démontré l'inégalité de Bernoulli (Jacques, 1654, 1705) qui dit que si x est un réel positif ou nul et si n est un entier naturel alors $(1+x)^n > nx$ (inégalité démontrée par un raisonnement par récurrence dont on soigne la rédaction) on en déduit qu'il y toujours plus de parties (i.e. de sous-ensembles) dans un ensemble fini que d'éléments.

On généralise ce résultat au cas d'un ensemble quelconque, fini ou infini en ayant recours à un raisonnement par l'absurde. Il n'existe pas de bijection entre un ensemble et l'ensemble de ses parties.

On explique le lien entre les sous-ensembles (les parties) d'un ensemble et les applications de cet ensemble dans l'ensemble $\{0,1\}$: à chaque application est associé un sous-ensemble et à chaque sous-ensemble est associée une application. Ceci signifie que l'ensemble des parties d'un ensemble est en bijection avec l'ensemble des applications de cet ensemble dans $\{0,1\}$.

On explique aussi comment associer à un réel compris entre 0 et 1 une suite de 0 et de 1 c'est à dire une application de **N** dans $\{0,1\}$ et donc une partie de **N**. Ceci permet de comprendre d'une autre façon que la méthode de Cantor pourquoi il n'y pas de bijection entre **N** et **R**.

Puisqu'il n'y a pas de bijection entre $\mathbf{N}$ et $\mathbf{R}$ et qu'il y a une bijection entre $\mathbf{N}$ et $\mathbf{Q}$ on est sûr qu'il existe des réels qui ne sont pas des rationnels. Il est aussi montré qu'on peut s'en convaincre en raison de la périodicité (qui est prouvée) de l'écriture décimale des rationnels : on donne un réel dont l'écriture décimale n'est pas périodique.

On explique aussi qu'une propriété remarquable de $\mathbf{R}$ et que ne possède pas $\mathbf{Q}$ est la propriété de la borne supérieure : si X est un sous-ensemble non vide de $\mathbf{R}$ et majoré (il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in X$ on a $x \leq M$) alors X possède une (unique) borne supérieure S (c'est l'unique réel tel que si $x \in X$ alors $x \leq S$ et si $y \in \mathbf{R}$ vérifie $y < S$ alors il existe $x \in X$ tel que $y < x$).

On montre alors que la racine carrée de 2 (notée $\sqrt{2}$) qui apparaît naturellement comme longueur d'un coté d'un carré dont les sommets sont les milieux d'un carré de côté 2 (faire le dessin qui est une version basique du théorème de Pythagore (environ -580, -495)) ne peut être un nombre rationnel. Pour le faire on donne un classique raisonnement par l'absurde.

Il reste à montrer que la racine carrée de 2 (notée $\sqrt{2}$) est la borne supérieure de l'ensemble

$$X = \{r \in \mathbf{Q} |\ 0 \leq r,\ r^2 \leq 2\}$$

qui est un ensemble non vide (il contient 0, 1, $1,4$) et majoré par 2.

15/01. On rappelle la preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

On prouve que la borne supérieure s du sous-ensemble E de $\mathbf{R}$ des $\{r \in \mathbf{Q} | r \geq 0, r^2 \leq 2\}$ qui est non vide car contenant 0, 1 et $1,4$ et majoré par 2 est égale à $\sqrt{2}$. On débute sans conclure en introduisant les réels $s-\varepsilon$ et $s+\varepsilon$ où $\varepsilon > 0$. La preuve qui est finalement donnée est celle suggérée par une personne de la promotion. Elle consiste à montrer que $\sqrt{2}$ est un majorant de E et que c'est le plus petit de ses majorants. Mais à ce stade l'existence de $\sqrt{2}$ n'est pas donnée.

On explique que $\mathbf{R}$ est archimédien, c'est à dire que si $x > 0$ et si $y \in \mathbf{R}$ alors il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $y \leq nx$.

On donne comme exemple d'ensemble ordonné mais non archimédien un exemple voisin de l'ensemble suivant. Il s'agit de l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions de la forme $x \in \mathbf{R} \mapsto \lambda x^n$ avec $\lambda \in \mathbf{R}^{+*}$ et $n \in \mathbf{N}$ auxquelles on ajoute les fonctions de la forme $x \in \mathbf{R} \mapsto \mu \exp(x)$ avec $\mu \in \mathbf{R}^{+*}$. L'ordre qu'on met sur $\mathcal{E}$ est donnée par $f \leq g$ si $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$.

C'est l'occasion d'expliquer pourquoi si $x < y$ sont deux réels il existe un rationnel dans $]x, y]$. On le fait dans le cas ou $0 \leq x < y$ et on considère le rationnel $m_0, \delta_1 ... \delta_p$ où δ_p est le premier chiffre de l'écriture en base dix de y qui diffère de celle de x.

On introduit la notion de suite numérique et on étudie les suites arithmétiques et géométriques (différentes caractérisations, somme de termes, croissance, décroissance...). On s'intéresse aussi à la formule

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \times \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k.$$

On montre que la suite $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ avec $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda^k$ et $\lambda \in]0,1[$ est croissante et majorée par $\dfrac{1}{1-\lambda}$.

22/01. On prouve l'existence de $\sqrt{2}$ en montrant que c'est la borne supérieure du sous-ensemble E de $\mathbf{R}$ des $\{r \in \mathbf{Q} | r \geq 0, r^2 \leq 2\}$. Pour le faire on raisonne par l'absurde, d'abord en montrant qu'en supposant $s^2 > 2$ alors on peut trouver un majorant de E strictement plus petit que s (par exemple $s - \eta$ avec $\eta \in]0, \frac{s^2-2}{2s}]$), puis en montrant qu'en supposant $s^2 < 2$ alors il existe dans E un rationnel strictement plus grand que s (prendre un rationnel quelconque dans $]s, s+\eta[$ avec $\eta \in]0, \frac{2-s^2}{5}[$ car alors $(s+\eta)^2 < 2$).

On réutilisant la version de l'inégalité de Bernoulli prouvée le 8 janvier on montre que l'assertion

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N}\ [n \geq N \Longrightarrow 0 < r^n < \varepsilon]$$

est vraie si $r \in]0,1[$.

On donne, pour une suite numérique $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, la définition de tendre, de converger, vers un réel donné $l \in \mathbf{R}$ en l'exprimant à l'aide de l'assertion

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N}\ [n \geq N \Longrightarrow |a_n - l| < \varepsilon].$$

On indique que ceci est noté $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$.

On montre que la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ donnée par $a_n = \frac{1}{n+1}$ tend vers 0 et qu'il en est de même pour la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ donnée par $a_n = \frac{\lambda}{(n+1)^d}$ si $\lambda \in \mathbf{R}^*$ et $d \in \mathbf{N}^*$.

On montre qu'a contrario, la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ donnée par $a_n = (-1)^n$ ne tend vers aucun réel l.

Il est établit que si une une suite tend vers un réel elle ne tend que vers ce réel (unicité de la limite).

On montre que toute suite croissante majorée $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent vers la borne supérieure de $\{a_n | n \in \mathbf{N}\}$. On énonce un résultat analogue pour les suites décroissantes et minorées.

On étudie les suites récurrentes définies de la façon suivante. On considère une fonction $f : [0,1] \to [0,1]$ et une suite $((u_n)_{nß\mathbf{N}}$ de la forme $u_0 \in \mathbf{N}$ et si $n \in \mathbf{N}$ alors $u_{n+1} = f(u_n)$. On montre que si f est croissante alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante si $u_0 \leq u_1$ et décroissante si $u_0 \geq u_1$. On montre que si f est décroissante alors les suites $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ avec $v_n = u_{2n}$ si $n \in \mathbf{N}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ avec $w_n = u_{2n+1}$ si $n \in \mathbf{N}$ sont l'une croissante et l'autre décroissante. On illustre ces situations avec des représentations graphiques.

En fin on s'intéresse à la suite de Héron (environ 0, -100). On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x+2/x}{2}$ et on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ si $n \in \mathbf{N}$. Après avoir calculé la dérivée de la fonction f (on obtient $f'(x) = \frac{1-2/x^2}{2}$) on montre à l'aide du calcul de $x - f(x)$ et de $f(x) - \sqrt{2}$ que la suite $(u_n)_{n_i n\mathbf{N}}$ est minorée par $\sqrt{2}$ et décroissante.

29/01. On débute la séance en prouvant que la suite de Héron considérée mercredi dernier converge vers $\sqrt{2}$. Pour le faire on montre en particulier une inégalité du type $|a_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{1}{n}$ pour les $n \geq 2$. On donne une interprétation géométrique de la méthode de Héron en expliquant que a_{n+1} est la moyenne de la longueur a_n et de la largeur $\frac{2}{a_n}$ d'un rectangle d'aire 2. On fait observer à l'aide d'un tableur que la suite de Héron converge très rapidement vers $\sqrt{2}$ et on explique (aussi graphiquement) que ceci résulte du fait que la fonction f définie par $f(x) = \frac{x+2/x}{2}$ associée à la suite de Héron ($a_{n+1} = f(a_n)$ si $n \in \mathbf{N}$) possède une dérivée nulle en $\sqrt{2}$.

Ensuite on prouve de multiples propriétés des suites convergentes (limite d'une somme, d'un produit, de l'inverse, théorème des gendarmes, respect de l'ordre éventuel par passage à la limite, caractère borné des suites convergentes, convergence vers 0 du produit d'une suite convergente vers 0 avec une suite bornée). On montre que la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ donnée par $a_n = \frac{1}{n+1}(\text{Partie entiere}(n\sqrt{2}) - n\sqrt{2}))$ si $n \in \mathbf{N}$ converge vers 0. On donne aussi à l'aide d'un tableur une représentation graphique des termes Partie entiere$(n\sqrt{2}) - n\sqrt{2}$ si $n \in \mathbf{N}$.

La dernière partie est consacrée au début de l'étude des fonctions numériques de la variable réelle. On introduit la notion de fonction continue en un réel en discutant de l'assertion

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall x \in I\ |x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

On montre que les fonctions constantes, les fonctions affines et la fonction qui à $x \in \mathbf{R}$ associe son carré x^2 sont continues en tout réel. On montre que la somme de deux fonctions continues en un point a est continue en a. On énonce que le produit de deux fonctions continues en a est continu en a. On débute la preuve de ce résultat de la façon suivante. On considère $f, g : I \to \mathbf{R}$ où I est un intervalle non vide de $\mathbf{R}$. On fixe un réel a dans I. On montre que si $x \in I$ alors

$$f(x)g(x) - f(a)g(a) = f(x)(g(x) - g(a)) + g(a)(f(x) - f(a)).$$

05/02. On achève la preuve de la continuité en un point du produit de deux fonctions continues en ce point. On montre aussi que si une fonction ne s'annule alors son inverse (pour la multiplication) est continue en tout point où elle est elle-même continue.

On indique que les résultats sur la préservation de la continuité en un point par addition, produit et passage à l'inverse pour la multiplication permettent de montrer que les fonctions polynomiales et les fonctions rationnelles sont continues là où elles sont continues.

On montre que la fonction indicatrice de $\mathbf{Q}$ qui vaut sur les rationnels et 0 sur les irrationnels n'est continue en aucun point de $\mathbf{R}$. Cette démonstration utilise le fait que si $a, b \in \mathbf{R}$ sont tels que $a < b$ alors l'intervalle $]a, b[$ contient au moins un rationnel et un irrationnel. La preuve de ce résultat est faite par des petits pas. Plus exactement, en utilisant l'existence de la partie entière on montre l'existence d'une entier naturel non nul N tel que $\frac{1}{N} < \frac{b-a}{2}$ et on en déduit l'existence d'un entier relatif d tel que $\frac{d}{N}$ appartient à $]a, b[$. On montre de façon analogue l'existence de $N_1 \in \mathbf{N}^*$ et de $d_1 \in \mathbf{Z}$ tel que l'irrationnel $\sqrt{2} + \frac{d_1}{N_1}$ appartient à $]a, b[$. On montre aussi, toujours de façon analogue, l'existence de $N_2 \in \mathbf{N}^*$ et de $d_2 \in \mathbf{Z}$ tel que l'irrationnel $\sqrt{2} \times \frac{d_2}{N_2}$ appartient à $]a, b[$.

On revient ensuite sur l'étude de la convergence des suites. On montre tout d'abord la convergence des suites $(\lambda^n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $\left(\sum_{k=0}^{n} \lambda^k\right)_{n\in\mathbf{N}} = \left(\frac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ si et seulement si $|\lambda| < 1$. On explique ce qu'est une suite extraite (ou une sous-suite) d'une suite donnée et on montre que si une suite converge vers une limite lß$\mathbf{N}$ alors toute sous-suite converge vers la même limite. Des exemples sont fournis. On définit ce que sont deux suites adjacentes et ont montre que deux telles suites convergent vers la même limite. On applique ce résultat aux suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par $a_0 = 1$, $b_0 = 3$ et si $n \in \mathbf{N}^*$ alors

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \text{ et } b_n = a_n + \frac{1}{n \times n!}$$

et on montre que la limite commune à ces deux suites (limite notée e) est un nombre irrationnel. Enfin on énonce le théorème de Bolzano-Weiertrass (1781-1848 et 1815-1897) qui dit que de toute suite bornée on peut extraire une suite convergente. La preuve est une preuve par dichotomie qui pourrait s'inspirer de la recherche du aiguille dans une botte de foin. On débute cette preuve en considérant une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à valeurs dans un segment $[m, M]$ et en construisant récursivement des suites adjacentes $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et une fonction strictement croissante $\phi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ de la façon suivante. On pose $u_0 = m$, $v_0 = M$, $\phi(0) = 0$. On observe que $\{k \geq \phi(0) | a_k \in [u_0, v_0]\}$ est infini car c'est $\mathbf{N}$ tout entier. Pour $n \in \mathbf{N}$ tel que $u_k, v_k, \phi(k)$ soient définies pour tout $k \leq n$ et $\{k \geq \phi(n) | a_k \in [u_n, v_n]\}$ soit infini on construit $u_{n+1}, v_{n+1}, \phi(n+1)$ en distinguant deux cas :
- soit $\{k \geq \phi(n) | a_k \in [u_n, \frac{u_n+v_n}{2}]\}$ est infini et alors $u_{n+1} = u_n$, $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$ et $\phi(n+1)$ est le plus élément du sous-ensemble infini de $\mathbf{N}$ formé des $k > \phi(n)$ tels que $a_k \in [u_n, \frac{u_n+v_n}{2}]$;
- dans le cas contraire l'ensemble $\{k \geq \phi(n) | a_k \in [u_n, \frac{u_n+v_n}{2}]\}$ est fini mais $\{k \geq \phi(n) | a_k \in [\frac{u_n+v_n}{2}, v_n]\}$ est infini et alors $u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$, $v_{n+1} = v_n$ et $\phi(n+1)$ est le plus élément du sous-ensemble infini de $\mathbf{N}$ formé des $k > \phi(n)$ tels que $a_k \in [\frac{u_n+v_n}{2}, v_n]$.
Il restera à s'assurer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont adjacentes et que si $n \in \mathbf{N}$ alors on a

$u_n \leq a_{\phi(n)} \leq v_n$ car alors le théorème des gendarmes garantira que la suite extraite $(a_{\phi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers la limite commune aux suites adjacentes $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

12/02. On reprend et précise la preuve du théorème de Bolzano-Weierstrass qui dit que de toute suite numérique bornée on peut extraire une sous-suite convergente.

On précise un petit lemme sur les applications strictement croissantes de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ en montrant par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que si ϕ est une telle application alors $\phi(n) \geq n$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$.

Comme les chapitres d'analyse qui sont abordés dans ce cours font souvent appel au maniement d'inégalités un rappel sur la valeur absolue et sur la double inégalité $||x|-|y|| \leq |x+y| \leq |x|+|y|$ est donné : minorer, majorer et approcher sont les bases de l'analyse comme le dit Jean Dieudonné (1906-1992).

On introduit la définition pour une suite d'être de Cauchy (1789-1857) et on montre que converger vers une limite finie est équivalent à être de Cauchy. Pour illustrer cette notion on montre que si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite à valeurs dans $[-1,1]$ alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} u_k$ si $n \in \mathbf{N}$ converge vers une limite l qui appartient à $[-2,2]$.

la dernière partie du cours est consacrée à la préparation du contrôle continu du 26 février. On traite les six exercices suivants :
- irrationalité de $\sqrt{2}$;
- inégalité $(1+x)^n > nx$ si $n \in \mathbf{N}$ et $x \geq 0$;
- conversion en base deux de 1111 et de 11, produit en base deux, conversion en base dix du résultat ;
- convergence de $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ donnée par $a_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$ en revenant à la définition de convergence ;
- étude de la convergence vers 0 d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$ et telle qu'il existe une fonction $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ vérifiant $a_{n+1} \leq \frac{1}{2} a_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ (en passant par minoration par 0, décroissance, majoration par $a_0 \frac{1}{2^n}$ et par $a_0 \frac{1}{n+1}$ de a_n si n$\in \mathbf{N}$) ;
- continuité en tout point de $\mathbf{R}$ de f définie par $f(x) = x^2$.

26/02. On achève le cours sur les fonctions continues en prouvant le théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire qui dit que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle et en prouvant que l'image d'un segment par une fonction continue est un segment. On précise ce qu'est un intervalle et on caractérise un intervalle comme étant un sous ensemble I de $\mathbf{R}$ tel que si $x, y \in I$ alors tout z entre x et y est dans Y. Cette caractérisation n'est pas établie mais seulement expliquée et illustrée.

On débute le cours sur les fonctions dérivable en définissant ce qu'est le nombre dérivé (la dérivée) d'une fonction en un point. On montre l'unicité du nombre dérivé. On montre que si une fonction admet un nombre dérivé en un point elle est alors continue en ce point. On détermine le nombre dérivé en un réel quelconque des fonction $x \mapsto \lambda x + \mu$ et λx^2 et on montre que la fonction $|x|$ n'admet pas de nombre dérivé en 0.

La deuxième partie de la matinée est consacrée au premier contrôle continu.

05/03. Les copies du premier contrôle sont rendues.

On établit quelques propriétés de la dérivation : dérivée d'une somme, d'un produit, de $\frac{1}{x}$, d'un quotient, de x^n avec $n \in \mathbf{N}$, de f^n avec $n \in \mathbf{Z}$.

On prouve le théorème de Rolle, on en déduit le théorème des accroissements finis et l'inégalité des accroissements finis.

On établit les relations entre croissance, croissance stricte, décroissance et décroissance stricte et signe de la dérivée. On donne comme exemple emblématique la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^3$ qui est une fonction strictement croissante, dérivable et dont la dérivée s'annule en 0.

Au cours de la séance on démontre qu'il est équivalent de dire pour une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ définie sur un intervalle I qu'elle est dérivable de dérivée égale à l en un un $a \in I$ donné et que la fonction ε définie sur I par $\varepsilon(a) = 0$ et $\varepsilon(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - l$ si $x \in I \setminus \{a\}$ admet 0 comme limite en a. Cette propriété est utilisée pour démontrer la formule de dérivation d'une fonction composée $g \circ f$ en un point $a \in I$: $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a)$ si $g \circ f$ est bien définie, si f est dérivable en a et si g est dérivable en $f(a)$. On propose aussi une preuve alternative de cette formule qui ne marche que dans certaine situations dont celle où $f(x) \neq f(a)$ pour tout $x \in I \setminus \{a\}$.

On termine la séance en faisant un retour sur les fonctions continues en énonçant que si $f : I \to \mathbf{R}$ est une fonction continue définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ il est équivalent de dire que f est injective et que f est strictement monotone et qu'alors $f : I \to f(I)$ est une bijection dont la réciproque est continue. La première partie de l'énoncé est prouvée. Il est en particulier prouver par un raisonnement par contraposée que si f est injective alors elle est strictement monotone. Ce raisonnement repose sur l'étude de la fonction $g : [0,1] \to \mathbf{R}$ qui à t associe $f(ta+(1-t)c) - f(tb+(1-t)d)$ où $a < b$ et $c < d$ sont dans I et vérifient $f(a) < f(b)$ et $f(c) > f(d)$. Il repose aussi sur le théorème des valeurs intermédiaires et sur la bonne compréhension de ce qu'est un barycentre (un centre de gravité en physique).

12/03. En début de séance on prouve le résultat suivant qui avait été énoncé sans preuve la semaine précédente. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et f une fonction continue de I dans $\mathbf{R}$. On suppose que f est strictement monotone. Alors $f(I)$ est un intervalle, f est une bijection de I dans $f(I)$ et sa réciproque est une bijection continue de $f(I)$ dans I. On prouve aussi que si on suppose f dérivable alors sa réciproque est aussi dérivable si et seulement si la dérivée f' de f ne s'annule jamais. Dans ce cas on montre que $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ si $y \in f(I)$.

Ensuite, on applique le théorème des valeurs intermédiaires pour prouver que si $f : [0,1] \to [0,1]$ est continue alors elle admet au moins un point fixe, c'est à dire qu'il existe $a \in [0,1]$ tel que $f(a) = a$. On traite aussi un exercice dans lequel il s'agit de montrer, lorsque des conditions sont données sur une fonction (continuité, bijectivité, nature de $f(I)$ et de $f^{-1}(I)$, dérivabilité de f^{-1}), s'il existe ou non un exemple d'une telle fonction.

La dernière partie de la séance est consacrée à l'étude des fonctions polynomiales (appelées aussi polynôme). On définit ce qu'est un polynôme, ce qu'est le degré d'une telle fonction on donne quelques propriétés des polynômes (si P et Q sont des polynômes et $\lambda \in \mathbf{R}$ alors $P+Q$, $P \times Q$, λP et $Q \circ P$ sont des polynômes) et de leurs degrés. On donne quelques exemples. On démontre l'existence et l'unicité du quotient et du reste de la division euclidienne d'un polynôme A par un second polynôme B supposé on nul. La preuve est réalisée par récurrence sur le degré du polynôme A. On fait deux calculs explicites de division euclidienne. On déduit de ce résultat de division euclidienne que si P est un polynôme non nul et r un réel tel que $P(r) = 0$ alors il existe Q de degré un de moins que celui de P tel que $P = (X-r) \times Q$. On utilise ceci pour montrer que si $n \in \mathbf{N}$ alors un polynôme de degré n s'annule au plus n fois. On donne une seconde preuve de ce résultat en utilisant le théorème de Rolle après avoir remarqué que P est dérivable et que sa dérivée P' est un polynôme de degré un de moins. Les deux preuves reposent sur une récurrence sur le degré de P.

19/03. On définit ce qu'est une fraction rationnelle et pour une telle fonction ses zéros et ses pôles.

Après avoir fait observer qu'un polynôme (et une fraction rationnelle) ne pouvait pas être égal au cosinus ou au sinus qui sont des fonctions qui s'annulent une infinité de fois on donne une construction de l'exponentielle : on prouve que si $x \in \mathbf{R}$ alors la suite $(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ce qu'on définit comme l'exponentielle de x et qu'on note $\exp(x)$. On prouve rapidement la continuité de l'exponentielle et on donne des indications sur la dérivabilité de exp et sur l'égalité $\exp' = \exp$.

Au cours de cette partie on montre que la suite $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ si $n \in \mathbf{N}^*$ n'a pas de limite finie : elle est croissante et non bornée.

On indique ensuite que la méthode qui a permis de construire l'exponentielle de façon rigoureuse peut être appliquée pour construire les fonctions cosinus et sinus pour $x \in \mathbf{R}$ et logarithme népérien de $1+x$ seulement pour $x \in]-1,1[$.

Dans la seconde partie de la séance on explore des thèmes susceptibles de faire l'objet du second contrôle. On dégage ainsi six exercices.

26/03. La première partie de la séance est une introduction aux nombres complexes. Plutôt que d'adopter le point de vue un peu artificiel selon lequel il existe un nombre noté i tel que le carré i^2 soit égal à -1 et de dire que formellement un complexe c'est un nombre du type $a+ib$ avec a et b réels et de définir la somme et le produit de deux complexes par

$$(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d)$$

et

$$(a+ib)\times(c+id) = (ac-bd)+i(bc+ad)$$

on construit le corps $(\mathbf{C},+,\times)$ des nombres complexes comme l'ensemble des restes de la division euclidienne des polynômes à coefficients réels par le polynôme x^2+1 qu'on munit des deux lois suivantes : la somme (dans $\mathbf{C}$) de $ax+b$ et de $cx+d$ est la somme usuelle $(a+c)x+(b+d)$ et le produit (dans $\mathbf{C}$) de $ax+b$ et de $cx+d$ est le reste de la division euclidienne du produit usuel $(ax+b)\times(cx+d)$ par x^2+1. On fait observer que 0 est le neutre pour cette addition et 1 est le neutre pour cette multiplication. On montre aussi que l'inverse de $ax+b$ (si $(a,b) \neq (0,0)$) est $\frac{-a}{a^2+b^2}x + \frac{b}{a^2+b^2}$. On fait aussi observer que dans $\mathbf{C}$ on a $x^2 = -1$ et donc que x et le nombre i (ou peut-être son opposé) sont égaux. Cette introduction savante aux complexes est l'occasion de faire quelques exemples de divisions euclidiennes de polynômes.

La seconde partie de la séance est consacrée à la préparation du second contrôle continu. Des propriétés fondamentales de l'exponentielle et du logarithme népérien sont données.

Il est indiqué comment à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires on peut montrer qu'une fonction s'annule dès qu'elle vérifie certaines propriétés.

Il est aussi montré par quels enchaînement il est possible de montrer que $x\ln(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0.

On s'intéresse à l'écriture a^x à laquelle l'exponentielle et le logarithme permettent de donner un sens qui coïncident avec le sens classique lorsque x est un entier naturel : on définit a^x par $a^x = \exp(x\ln(a))$. La notion de logarithme de base a lorsque $a > 0$ est aussi donnée : $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ si $x > 0$. On a $x = a^{\log_a(x)}$. On observe que si a est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et si x est un entier naturel alors la partie entière de $\log_a(x)$ à laquelle on ajoute une unité est égale au nombre de chiffres de l'écriture de x en base a. Cette partie est l'occasion de faire quelques divisions euclidiennes d'entiers.

On indique que si $x \in \mathbf{R}$ alors

- la suite de terme général $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k$ tend vers $\exp(x)$,

- la suite de terme général $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$ tend vers $\cos(x)$
- et la suite de terme général $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ tend vers $\sin(x)$.

On indique aussi que si $x \in]-1,1[$ alors
- la suite de terme général $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$ tend vers $\ln(1+x)$.

On fait observer que si x est rationnel alors les termes de ces suites sont tous rationnels (ce qui ne signifie nullement que les limites le soient).

On explique aussi comment on peut écrire dans un cas particulier une fraction rationnelle du type $\frac{1}{x^2+\alpha x+\beta}$ sous la forme $\frac{\lambda}{x-r}+\frac{\mu}{x-s}$.

Pour éviter toute arête le 2 avril la série des six exercices à préparer pour le dernier contrôle est envoyée à l'issue de cette ultime séance (https://perso.univ-rennes1.fr/jean-marie.lion/pass-maths-analyse/analyse-exercices-a-preparer-pour-le-cc2-2024-2025.pdf)

02/04. La première partie de la séance est une séance de questions-réponses sur les exercices à préparer pour le dernier contrôle. La seconde partie de la séance est dédiée au contrôle qui termine cet enseignement.