Licence MIASH - deuxième année

Mathématiques et informatique appliquées aux sciences humaines et sociales

Universités de Rennes 1 et Rennes 2

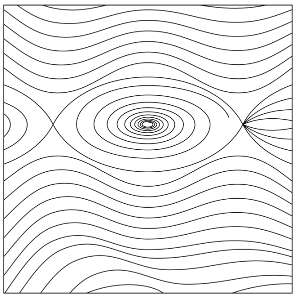
Analyse appliquée I

Jean-Marie Lion

Année 2021–2022

Si nous voulons avancer, il faut cesser de réduire les pauvres à des caricatures et prendre le temps de comprendre réellement leur vie, dans toute sa richesse et sa complexité
Abhijit Banerjee et Esther Duflo, économistes

I never learned math, so I had to think
Joan Robinson, économiste



Programme

Équations différentielles linéaires à coefficients constants (ordre 1 et 2), variation de la constante

Équations différentielles à variables séparables

Sources

Ces notes de cours reprennent et complètent la partie équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 et 2 du cours de première année de licence de mathématiques de l'université de Rennes 1 donné en 2006-2007 et 2007-2008 (A01 et AN1). Elles s'appuient aussi sur le livre *Cours de mathématiques spéciales* de Edmond Ramis, Claude Deschamps et Jacques Odoux (1977, Masson éditeur), sur le livre *Modélisation mathématique en écologie* de Pierre Auger, Christophe Lett et Jean-Christophe Poggiale (2010, Dunod éditeur), sur le polycopié en ligne *Système différentiels* de Pierre Pansu (2004) et sur l'encyclopédie en ligne Wikipédia. Un texte en ligne de l'Université Pierre et Marie Curie et un poly en ligne de Jean-Marc Richard (2009) ont servi de guides pour évoquer l'amortissement et la résonance. Des documents en ligne de Sandrine Caruso, Jean-René Chazottes et Marc Monticelli, Bernard Desgraupes, Leonhard Euler, Richard Goodwin, Jean-Pierre Ramis, Michel Rascle, Pierre Ratcliffe, Robert Solow, Grégory Vial et Vito Volterra ainsi qu'un programme sous Python de Nicolas Seguin ont été les sources qui ont permis de rédiger l'exemple d'Euler et les quatre applications à l'économie et à l'écologie. Signalons enfin que la source initiale de la théorie, sous sa version française est la traduction de l'œuvre de Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, par Émilie du Châtelet, publiée en 1756 et 1759 et accessible en ligne.

Table des matières

1 Équations différentielles

I Définition, résultat fondamental

Définition I.1 Un sous-ensemble Ω de $\mathbf{R}^d$ est dit **ouvert** si pour tout $M = (m_1, ..., m_d) \in \Omega$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $X = (x_1, ..., x_d) \in \mathbf{R}^d$ on a

$$|x_1 - m_1|, ..., |x_d - m_d| < \varepsilon \Rightarrow X \in \Omega.$$

Exemple I.1 Les ensembles $]0,1[^d$, $\{X = (x_1, ..., x_d) \in \mathbf{R}^d, x_1^2 + ... x_d^2 < K\}$ avec $K > 0$ sont des ouverts de $\mathbf{R}^d$ alors que $[0,1]^d$, $\{X = (x_1, ..., x_d) \in \mathbf{R}^d, x_1^2 + ... x_d^2 \leq K\}$ ne le sont pas.

Définition I.2 Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^d$. Une fonction $G : \Omega \to \mathbf{R}$ est dite une **lipschitzienne** s'il existe $K > 0$ tel que pour tous les $X, Y \in \Omega$

$$|f(x) - f(y)| \leq K \max\{|x_1 - y_1|, ..., |x_d - y_d|\}.$$

Exemple I.2 Les fonctions $ax+b$, $\sin(x)$ sont lipschitziennes. Les fonctions x^2, $\sqrt{x}$ ne le sont pas. Sur $\Omega = \{X = (x_1, ..., x_d) \in \mathbf{R}^d, |x_1|, ... |x_d| < R\}$ les fonctions $ax + by + c$, $x^2 + y^3 + 2xy$ sont lipschitzienne. La fonction $z - 2\sqrt{y}$ n'est pas lipschitzienne.

Définition I.3 Soit $G : D \to \mathbf{R}$ une fonction de $n+1$ variables réelles, continue, définie sur un ouvert D de $\mathbf{R}^{n+1}$. Une **solution de l'équation différentielle d'ordre** n

$$G(t, y, y', ..., y^{(n-1)}) = y^{(n)}$$

est une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ d'une variable réelle, définie sur un intervalle ouvert non vide I, n fois dérivable et qui vérifie

$$\forall t \in I, G(t, f(t), f'(t), ..., f^{(n-1)}(t)) = f^{(n)}(t).$$

Théorème I.1 *(cas particulier du théorème de Cauchy-Lipschitz (1824), admis) Soit $G : D \to \mathbf{R}$ une fonction de $n+1$ variables réelles et lipschitzienne. Soit $(t_0, y_0^0, y_0^1, ..., y_0^{n-1}) \in D$. Alors il existe un intervalle ouvert I qui contient t_0 et une solution $f : I \to \mathbf{R}$ de l'équation différentielle d'ordre n*

$$G(t, y, y', ..., y^{(n-1)}) = y^{(n)}$$

qui vérifie

$$(f(t_0), f'(t_0), ..., f^{(n-1)}(t_0)) = (y_0^0, y_0^1, ..., y_0^{n-1}).$$

De plus si $g : I \to \mathbf{R}$ est une solution de l'équation différentielle d'ordre n

$$G(t, y, y', ..., y^{(n-1)}) = y^{(n)}$$

qui vérifie aussi

$$(g(t_0), g'(t_0), ..., g^{(n-1)}(t_0)) = (y_0^0, y_0^1, ..., y_0^{n-1})$$

alors $f = g$.

Exemple I.3 On peut vérifier facilement que l'équation différentielle $y - y' - \sqrt{2}\sin(t + \frac{\pi}{4}) = 0$ admet comme solution qui vaut 1 en 0 la fonction cos. Le théorème précédent dit qu'elle est unique.

Exemple I.4 On peut vérifier que l'équation différentielle $2\sqrt{y}-y'=0$ admet une infinité de solution qui s'annulent en 0.

Définition I.4 Soit $G=(g_1,...,g_n):D\to\mathbf{R}^n$ une application de $n+1$ variables réelles, continue, définie sur un ouvert D de $\mathbf{R}^{n+1}$. Une **solution de l'équation différentielle ordinaire**

$$G(t,y)=y'$$

est une fonction $f=(f_1,...,f_n):I\to\mathbf{R}^n$ d'une variable réelle, définie sur un intervalle ouvert non vide I, dérivable et qui vérifie

$$\forall t\in I, G(t,f(t))=f'(t)$$

c'est à dire

$$\forall t\in I,\forall i\in\{1,...,n\}, g_i(t,f_1(t),...,f_n(t))=f_i'(t).$$

Si f est une telle solution, alors le lieu géométrique $\gamma=\{y=f(t),t\in I\}$ s'appelle **trajectoire** ou **orbite**.

Théorème I.2 *(cas particulier du théorème de Cauchy-Lipschitz (1824), admis) Soit $G:D\to\mathbf{R}^n$ une fonction de $n+1$ variables réelles et lipschitzienne. Soit $(t_0,y_0)\in D$. Alors il existe un intervalle ouvert I qui contient t_0 et une solution $f:I\to\mathbf{R}^n$ de l'équation différentielle ordinaire*

$$G(t,y)=y'$$

qui vérifie $f(t_0)=y_0$.
De plus si $g:I\to\mathbf{R}$ est une solution de l'équation différentielle ordinaire

$$G(t,y)=y'$$

qui vérifie aussi $g(t_0)=y_0$ alors $f=g$.

Exemple I.5 On peut vérifier facilement que l'équation différentielle $(t^2,y_1+y_2)=(y_1',y_2')$ admet comme solution qui vaut$(0,-2)$ en $t=0$ l'application $(\frac{1}{3}t^3,-\frac{1}{3}t^3-t^2-2t-2)$. Le théorème précédent dit qu'elle est unique.

Remarque I.1 La théorie des équations différentielles d'ordre n et celle des équations différentielles ordinaires sont assez voisines. Dans la suite on étudiera surtout certaines équations différentielles d'ordre n pour n égal à 1 ou 2.

II L'exponentielle et le logarithme népérien

Théorème II.1 *(admis) Il existe une fonction de* **R** *dans* **R** *notée* exp *et appelée* **exponentielle***, dérivable, qui vaut* 1 *en* 0 *et qui vérifie*

$$\exp'=\exp.$$

Proposition II.1 *L'exponentielle est l'unique fonction de* **R** *dans* **R** *dérivable, égale à sa dérivée et qui vaut* 1 *en* 0.

Proposition II.2 *L'exponentielle est une bijection croissante de* **R** *dans* $]0,+\infty)$.

Proposition II.3 *Si* $x,y\in\mathbf{R}$ *alors* $\exp(x+y)=\exp x\cdot\exp y$.

Proposition II.4 *L'exponentielle admet une réciproque notée* ln *et appelée* **logarithme népérien**, *fonction dérivable qui réalise une bijection croissante de* $]0,+\infty)$ *dans* $\mathbf{R}$ *et qui vérifie, si* $x,y \in$ $]0,+\infty)$,

$$\ln' x = \frac{1}{x} \text{ et } \ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

Remarque II.1 L'exponentielle apparaît avec Leibniz en 1690 et les logarithmes sont l'oeuvre de Neper (1614).

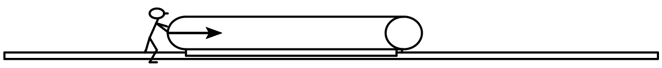
2 Équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 et 2

I Position du problème

Certains phénomènes qui dépendent du temps sont modélisés par des relations simples (linéaires ou affines) entre une fonction deux fois dérivable, et ses dérivées. En voici quelques exemples historiques.

Considérons un objet de masse m qui se déplace sur un rail. Sa position en fonction du temps est une fonction $t \mapsto f(t)$. L'hypothèse géniale de Newton (1687) est que l'accélération de cet objet, c'est à dire la dérivée seconde f'', multipliée par la masse de l'objet est égale à la somme F des forces exercées sur l'objet :

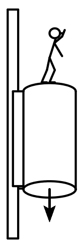
$$mf'' = F.$$



La loi de Newton

Supposons que le rail soit vertical. La fonction $f(t)$ sera l'altitude de l'objet. Supposons aussi que la seule force qui s'exerce soit le poids $P =$ qui résulte de l'attraction terrestre. Le poids P est proportionnel à m. On a $P = -mg$ où g est une constante qui ne dépend que de la terre, mais pas du temps ni de l'objet. L'équation de Newton devient alors

$$(1) \quad f'' = -g.$$



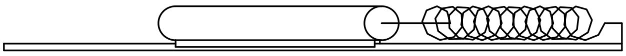
Chute d'un corps

On en déduit que si à l'instant $t = 0$ l'objet est en $f(0) = a$ et qu'il a une vitesse de départ égale à $f'(t) = v$, alors $f'(t) = v - gt$ et $f(t) = a + vt - \frac{1}{2}gt^2$.

Supposons maintenant que le rail soit horizontal et que la seule force qui s'exerce soit une force de rappel d'un ressort, proportionnelle à la distance à la position du ressort au repos. Il existe donc une constante $K >$ telle que si on prend comme origine de la droite la position de repos alors

$$(2) \quad Kf + mf'' = 0.$$

C'est le modèle physique de l'oscillateur harmonique.



Oscillateur harmonique

Le démographe et économiste Malthus (1798) considère que l'évolution en fonction du temps d'une population qui se développe se modélise de la façon suivante. La population est représentée par une fonction dérivable du temps $t \mapsto f(t)$. La dérivée f' représente la vitesse d'évolution de cette population. L'hypothèse de Malthus est qu'il existe une constante $k > 0$ telle que

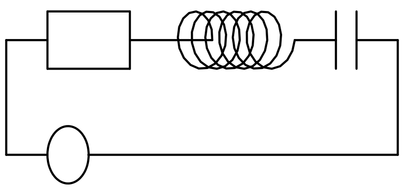
$$(3) \quad kf - f' = 0.$$

Ceci signifie que la vitesse de croissance de la population est supposée proportionnelle à la taille de la population.

Selon les physiciens Rutherford et Soddy (1902) la vitesse à laquelle les atomes se désintègrent est aussi proportionnelle à la quantité d'atomes non désintégrés. Il existe une constante $\lambda > 0$ tel que si $t \mapsto f(t)$ représente les atomes non désintégrés en fonction du temps alors

$$(4) \quad \lambda f + f' = 0.$$

Un circuit RLC est un circuit électrique fermé constitué d'une résistance parfaite R, d'une bobine parfaite L et d'un condensateur parfait C, le tout monté en série aux bornes d'un générateur de tension E. On suppose que les éléments caractéristiques R, L et C ne dépendent pas du temps mais que $t \mapsto E(t)$ est une fonction du temps. On désigne par $t \mapsto I(t)$ l'intensité électrique du circuit en fonction du temps.



Un circuit RLC

Selon Ohm (1825), la tension aux bornes de la résistance est $U_R(t) = RI(t)$. Selon Faraday (1831), la tension aux bornes de la bobine est $U_L = LI'(t)$. La charge du condensateur est égale à $CU_C(t)$ où $U_C(t)$ désigne la tension à ces bornes et selon Ampère (1827) l'intensité du circuit est égale à la dérivée de la charge du condensateur : $I(t) = CU_C'(t)$ et donc $I'(t) = CU_C''(t)$. Enfin d'apès la loi de Kirchhoff (1845), la somme des tensions des trois composants est égale à la tension du générateur. Ainsi si on pose $U_C = f$ on obtient :

$$(5) \quad f(t) + RCf'(t) + LCf''(t) = E(t).$$

Les cinq exemples ci-dessus ont une certaine unité formelle. Ils rentrent tous dans la famille des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 et 2. Ils admettent des traitements mathématiques similaires.

II Qu'est-ce qu'une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre au plus 2 ?

Définition II.1

— Soient a, b, c trois réels non tous nuls et soit $g : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur un intervalle I. **Résoudre l'équation différentielle linéaire à coefficients constants**

$$(*) \quad af'' + bf' + cf = g$$

consiste à rechercher toutes les fonctions $f : I \to \mathbf{R}$ et deux fois dérivables qui vérifient $(*)$. De telles fonctions sont appelées **solutions de** $(*)$.

— Si $a \neq 0$ l'équation différentielle $(*)$ est dite **du second ordre** et l'équation algébrique

$$az^2 + bz + c = 0$$

s'appelle **équation caractéristque** de $(*)$.

— Si $a = 0$ et $b \neq'$ elle est dite **du premier ordre**. Enfin si $a = b = 0$ l'équation différentielle $(*)$ est dite **d'ordre** 0.

— Si $g = 0$ l'équation différentielle $(*)$ est dite **homogène**, sinon elle est dite **avec second membre**.

— L'équation différentielle

$$(*)^h \quad af'' + bf' + cf = 0$$

est appelée **équation différentielle homogène associée à** $(*)$.

— Fixons $t_0 \in I$. Les **conditions initiales** vérifiées par une solution f de $(*)$ à t_0 sont la position $f(t_0)$ en t_0 si $(*)$ est du premier ordre et le couple (position, vitesse) à t_0 c'est à dire $(f(t_0), f'(t_0))$ si $(*)$ est du deuxième ordre.

Proposition II.1 *Soit*

$$(*) \quad cf = g$$

d'odre 0. *La solution de* $(*)$ *est* $\frac{g}{c}$.

Proposition II.2 *Soit*

$$(*) \quad bf' = g$$

d'odre 1. *Les solutions de* $(*)$ *sont les primitives de* $\frac{g}{b}$.

Ceci ramenène la résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 1 dans lesquelles seule la dérivée de f intervient à la recherche de primitives.

Proposition II.3 *Si* $(*)$ *est homogène et si* f_1, f_2 *sont des solutions de* $(*)$ *et* $\lambda \in \mathbf{R}$ *alors* λf_1 *et* $f_1 + f_2$ *sont encore solutions. De plus la fonction nulle est solution de* $(*)$.

Proposition II.4 *Si* f_1 *et* f_2 *sont solutions d'une équation différentielle linéaire avec second membre alors la différence* $f_1 - f_2$ *est solution de l'équation homogène associée.*

III Résolution de l'équation homogène

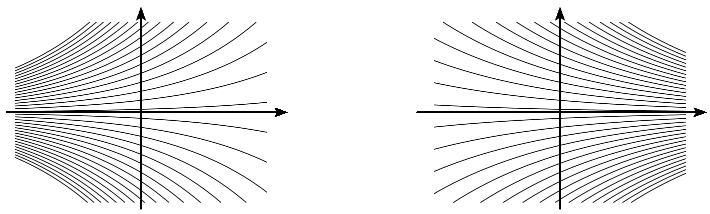
Lemme III.1 *Soit $t_0 \in \mathbf{R}$. L'équation différentielle $bf' + cf = 0$, homogène d'ordre 1, admet une seule solution qui s'annule en t_0 : la fonction nulle.*

Proposition III.1 *(***équation homogène d'ordre 1***) Les solutions de l'équation différentielle*

$$bf' + cf = 0$$

sont les fonctions

$$t \mapsto \lambda \exp(-\frac{c}{b}t) \text{ avec } \lambda \in \mathbf{R}.$$



Comportement des solutions de $bf' + cf = 0$ suivant le signe de $-c/b$

On déduit de cette proposition le résultat suivant.

Proposition III.2 *Soit t_0 et $x_0 \in \mathbf{R}$. Il existe une et une seule solution f de l'équation différentielle $bf' + cf = 0$ qui vérifie $f(t_0) = x_0$.*

Ce résultat est vrai aussi dans le cas où $b = 1$ et c est une fonction continue de t :

Proposition III.3 *Soit c une fonction continue sur un intervalle I, $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbf{R}$. Il existe une et une seule solution f de l'équation différentielle $f'(t) + c(t)f(t) = 0$ qui vérifie $f(t_0) = x_0$.*
Cette solution est la fonction

$$t \mapsto x_0 \exp(-\int_{t_0}^{t} c(s)ds).$$

Supposons $(*)$ homogène d'ordre 2. Pour résoudre cette équation différentielle on discute en fonction du nombre et de la nature des racines de l'**équation caractéristque**

$$az^2 + bz + c = 0.$$

On considère donc le signe de son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

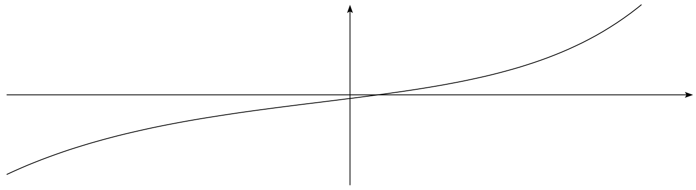
Lemme III.2 *Soit $t_0 \in \mathbf{R}$. L'équation différentielle $af'' + bf' + cf = 0$, homogène d'ordre 2, admet une seule solution qui s'annule ainsi que sa dérivée en t_0 : la fonction nulle.*

Proposition III.4 *(***équation homogène d'ordre 2 avec $\Delta > 0$***) Supposons que $(*)$ soit homogène d'ordre 2 et que les racines u_1 et u_2 de l'équation caractéristique $az^2 + bz + c = 0$ soient deux réels distincts. Alors les solutions de*

$$(*) \quad af'' + bf' + cf = 0$$

sont les fonctions

$$t \mapsto \lambda_1 \exp(u_1 t) + \lambda_2 \exp(u_2 t) \text{ avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}.$$



Une solution de l'équation différentielle $f'' - f' - 2f = 0$

Proposition III.5 *(***équation homogène d'ordre 2 avec** $\Delta = 0$*) Supposons que $(*)$ soit homogène d'ordre 2 et que l'équation caractéristique $az^2 + bz + c$ possède une racine double réelle u. Alors les solutions de*

$$(*) \quad af'' + bf' + cf = 0$$

sont les fonctions

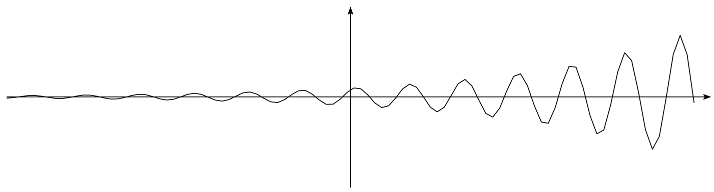
$$t \mapsto \lambda_1 \exp(ut) + \lambda_2 t \exp(ut) \text{ avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}.$$

Proposition III.6 *(***équation homogène d'ordre 2 avec** $\Delta < 0$*) Supposons que $(*)$ soit homogène d'ordre 2 et que les racines u_1 et u_2 de l'équation caractéristique $az^2 + bz + c$ ne soient pas réelles : il existe $r \in \mathbf{R}$ et $\omega \in \mathbf{R}$ tels que $u_1 = r + i\omega$ et $u_2 = r - i\omega$. Alors les solutions de*

$$(*) \quad af'' + bf' + cf = 0$$

sont les fonctions

$$t \mapsto \lambda_1 \exp(rt)\cos(\omega t) + \lambda_2 \exp(rt)\sin(\omega t) \text{ avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}.$$



Une solution de l'équation différentielle $f'' - 2f' + 2f = 0$

On déduit de ces propositions le résultat suivant.

Proposition III.7 *Soit t_0, x_0 et $v_0 \in \mathbf{R}$. Il existe une et une seule solution f de l'équation différentielle $af'' + bf' + cf = 0$ qui vérifie $f(t_0) = x_0$ et $f'(t_0) = v_0$.*

Remarque III.1 Contrairement à l'ordre 1, il n'y a pas de méthode générale pour exprimer les solutions des équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 2 lorsque les coefficients a, b et c sont des fonctions continues et non des constantes.

IV Recherche d'une solution particulière

Il reste à trouver une solution **particulière** de l'équation différentielle $(*)$. Les autres s'en déduisent par addition de solutions de l'équation homogène. Nous le ferons en toute généralité seulement pour les équations différentielles linéaires d'ordre 1.

Proposition IV.1 *(***équation différentielle d'ordre 1 à coefficients** b **et** c **constants***) Soit $b, c \in \mathbf{R}$ avec $b \neq 0$. Une solution particulière de l'équation différentielle*

$$bf' + cf = g$$

est la fonction

$$t \mapsto \exp\left(-\frac{c}{b}t\right) \int_{t_0}^{t} \frac{1}{b} g(u) \exp\left(\frac{c}{b}u\right) du$$

avec t_0 dans l'intervalle I.

Exemples IV.1

— Les solutions de $f' + f = 0$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda \exp(-t)$.
— Une solution particulière de l'équation $f' + f = t$ est la fonction

$$t \mapsto \exp(-t) \int_0^t u \exp(u) du,$$

c'est à dire la fonction $t - 1 + \exp(-t)$.
— L'équation différentielle $f' + f = \frac{1}{t}$ s'appelle équation d'Euler. Une solution particulière de cette équation définie sur $]0, +\infty)$ est la fonction

$$t \mapsto \exp(-t) \int_1^t \frac{1}{u} \exp(u) du.$$

Donnons maintenant l'énoncé général où $b = 1$ et c est une fonction continue de t.

Proposition IV.2 *(***équation différentielle d'ordre 1***) Soit c, g des fonctions continues sur un intervalle I. Une solution particulière de l'équation différentielle*

$$f' + cf = g$$

est la fonction

$$t \mapsto \exp(-\int_{t_0}^{t} c(s) ds) \int_{t_0}^{t} g(u) \exp\left(\int_{t_0}^{u} c(s) ds\right) du$$

avec t_0 dans l'intervalle I.

Remarque IV.1 La méthode permettant d'obtenir sous forme de formule intégrale une solution de l'équation différentielle considérée s'appelle méthode de variation de la constante.

Proposition IV.3 *(***équation différentielle d'ordre 1 ou 2 avec second membre particulier***) On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 ou 2*

$$(*) \quad af'' + bf' + cf = g$$

avec $a, b, c \in \mathbf{R}$, $(a, b) \neq (0, 0)$, g une fonction de la forme

$$g(t) = P(t) \exp(vt) \cos(wt + \phi)$$

où P est un polynôme de degré p et $v, w, \phi \in \mathbf{R}$. Alors $(*)$ admet une solution particulière sous la forme

$$t \mapsto Q(t) \exp(vt) \cos(wt) + R(t) \exp(vt) \sin(wt)$$

où Q et R sont des polynômes de degré au plus $p + 2$. Plus précisément si on note u_1 et u_2 les racines de l'équation caractéristique $az^2 + bz + c = 0$ (il n'y a que u_1 si $a = 0$) on distingue les trois cas suivants.

— *Si $v+iw$ est différent des racines u_1 et u_2 les degrés de Q et R peuvent être choisis égaux à p.*
— *Si $v+iw=u_1$ et $u_1 \neq u_2$ les degrés de Q et R peuvent être choisis égaux à $p+1$.*
— *Si $v+iw=u_1=u_2$ les degrés de Q et R peuvent être choisis égaux à $p+2$.*

Remarques IV.2

— Si le second membre est du type $\alpha \exp(vt)\cos(wt+\phi)$, avec $\alpha \in \mathbf{R}$ et si $v+iw$ est différent des racines u_1 et u_2 on peut rechercher une solution particulière sous la forme $\beta \exp(vt)\cos(wt+\psi)$ avec $\beta \in \mathbf{R}$.
— Si le second membre est du type $P(t)\exp(vt)$ on peut rechercher une solution particulière sous la forme $Q(t)\exp(vt)$.
— Lorsque $a=0$ l'équation différentielle est du premier ordre et il n'y a qu'une racine u_1. Par conséquent on est dans un des deux premiers cas de la proposition.

Exemples IV.2

— Les solutions de $f''-2f'+f=0$ sont les combinaisons linéaires des fonctions $\exp(t)$ et $t\exp(t)$. Le polynôme t^2+4t+6 est une solution particulière de $f''-2f'+f=t^2$, $\cos(t)$ est solution particulière de $f''-2f'+f=2\sin(t)$, $\exp(2t)$ est une solution particulière de $f''-2f'+f=\exp(2t)$ et $t^2\exp(t)$ est solution particulière de $f''-2f'+f=2\exp(t)$.
— Les solutions $f''-2f'+2f=0$ sont les combinaisons linéaires des fonctions $\exp(t)\cos(t)$ et $\exp(t)\sin(t)$. La fonction $\frac{t}{2}+1$ est une solution particulière de l'équation différentielle $f''-2f'+2f=t+1$. La fonction $\frac{t}{2}+1+\exp(t)\sin(t)$ en est une autre.

Proposition IV.4 Superposition des solutions *On considère deux équations différentielles linéaires d'ordre au plus 2*

$$(*_1) \quad af''+bf'+cf=g_1$$

et

$$(*_2) \quad af''+bf'+cf=g_2$$

associées à la même équation homogène

$$(*)^h \quad af''+bf'+cf=0$$

mais avec des seconds membres g_1 et g_2 qui peuvent être différents. Si f_1 est une solution de $(*_1)$ et f_2 une soultion de $(*_2)$ alors f_1+f_2 est une solution de l'équation différentielle

$$af''+bf'+cf=g_1+g_2.$$

Exemple IV.3 Puisque $\cos(t)$ est solution particulière de $f''-2f'+f=2\sin(t)$ et que et $t^2\exp(t)$ est solution particulière de $f''-2f'+f=2\exp(t)$ on en déduit que $\cos(t)+t^2\exp(t)$ est une solution particulière de $f''-2f'+f=2\sin(t)+2\exp(t)$.

Donnons maintenant un énoncé qui donne une solution particulière d'une équation différentielle du second ordre à coefficients continus (et non nécessairement constants) à partir des solutions de l'équation différentielle homogène associée.

Proposition IV.5 (Recherche d'une solution particulière connaissant deux solutions indépendantes de l'équation homogène) *On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 2*

$$(*) \quad af''+bf'+cf=g$$

où a, b, c et g sont des fonctions continues définies sur un intervalle I. On suppose que a ne s'annule jamais et que f_1 et f_2 sont deux solutions de l'équation homogène associée et que pour tout t les couples $(f_1(t), f_1'(t))$ et $(f_2(t), f_2'(t))$ ne sont pas proportionnels. Alors il existe deux fonctions dérivables λ_1 et λ_2 définies sur I telle que $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ soit une solution de $(*)$ et telles que $\lambda_1' f_1 + \lambda_2' f_2 = 0$. Les dérivées λ_1' et λ_2' des fonctions λ_1 et λ_2 sont solutions du système

$$\lambda_1' f_1 + \lambda_2' f_2 = 0$$

$$\lambda_1' f_1' + \lambda_2' f_2' = \tfrac{g}{a}.$$

Remarque IV.3 La méthode qui vient d'être décrite s'appelle la méthode de variation des constantes.

V Amortissement et résonance

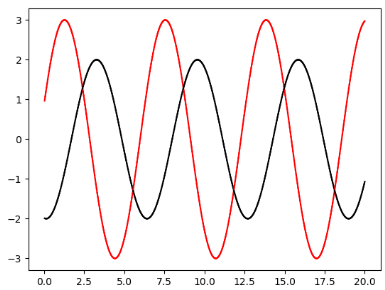
Les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants et avec second membre sinusoïdal fournissent les modélisations les plus simples de phénomènes périodiques gouvernés par des relations différentielles. Nous allons illustrer cette affirmation en donnant maintenant une application à la physique (mécanique et circuit RLC) des résultats précédents.

L'oscillateur harmonique non amorti Le modèle d'oscillateur harmonique présenté dans l'introduction peut s'écrire, si on pose $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{K}{m}}$,

$$(*)^h \quad f'' + \omega_0^2 f = 0.$$

Il s'agit du modèle d'oscillateur harmonique **non amorti**. Il admet comme solutions les fonctions périodiques

$$t \mapsto \lambda_1 \cos(\omega_0 t) + \lambda_2 \sin(\omega_0 t) \text{ avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}.$$



solutions de $f'' + f = 0$

Cet oscillateur peut subir une contrainte extérieure (imaginons par exemple que dans l'exemple introductif le point d'accroche du ressort soit soumis à un mouvement extérieur). Si cette contrainte s'exprime par l'introduction dans l'équation différentielle d'un second membre du type $\alpha \cos(\omega t)$ on parle d'oscillateur harmonique **forcé** sous l'action d'une **excitation sinusoïdale** :

$$(*) \quad f'' + \omega_0^2 f = \alpha \cos(\omega t).$$

Cette équation différentielle admet comme solution particulière, si $\omega \neq \omega_0$, la fonction

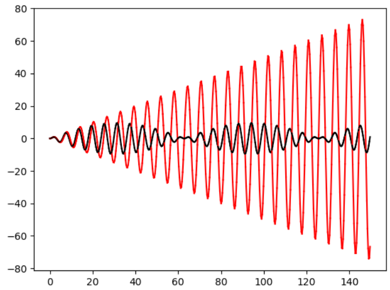
$$t \mapsto \frac{\alpha}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t).$$

C'est une solution périodique dont l'**amplitude** $\dfrac{\alpha}{\omega_0^2-\omega^2}$ (le maximum de sa valeur absolue) tend vers l'infini quand ω tend vers ω_0.

La valeur ω_0 s'appelle la valeur de résonance. La fonction

$$t \mapsto \frac{\alpha}{2} t \sin(\omega_0 t)$$

est une solution particulière de $(*)$. Elle est non bornée. Les autres solutions sont les sommes de cette solution particulière avec les solutions de l'équation $(*)^h$.



$f'' + f = \cos(\omega t)$
en rouge $\omega = 1$ *et en noir* $\omega = 1.1$

L'oscillateur harmonique amorti On peut considérer un oscillateur pour lequel il y a un frottement proportionnel à la vitesse. Il est modélisé par l'équation différentielle

$$(*)^h \quad f'' + 2kf' + \omega_0^2 f = 0 \ \text{ avec } \ k, \omega_0 > 0.$$

Il s'agit du modèle d'oscillateur harmonique **amorti**. Cette situation modélise aussi les circuits RLC présentés dans l'introduction.

Si $k > \omega_0$ alors $(*)^h$ admet comme solutions les fonctions

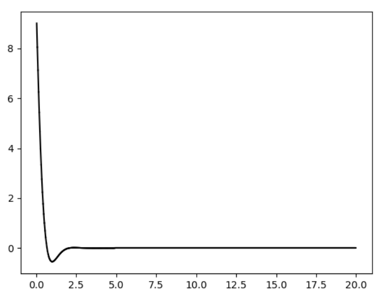
$$t \mapsto \lambda_1 \exp((-k + \sqrt{k^2 - \omega_0^2})t) + \lambda_2 \exp((-k - \sqrt{k^2 - \omega_0^2})t) \ \text{ avec } \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}.$$

Ces solutions tendent toutes vers 0 en l'infini.

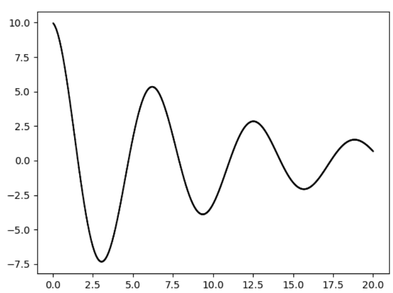
Si $k < \omega_0$ alors $(*)^h$ admet comme solutions les fonctions

$$t \mapsto \lambda_1 \exp(-kt) \cos(\sqrt{\omega_0^2 - k^2}\, t) + \lambda_2 \exp(-kt) \sin(\sqrt{\omega_0^2 - k^2}\, t) \ \text{ avec } \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}.$$

Ces solutions tendent toutes vers 0 en l'infini en oscillant.



$f'' + 5f' + f = 0$



$f'' + f'/5 + f = 0$

Comme dans le cas non amorti, cet oscillateur peut subir une contrainte extérieure . Si cette contrainte s'exprime par l'introduction dans l'équation différentielle d'un second membre du type $\alpha\cos(\omega t)$ on parle d'oscillateur harmonique amorti **forcé** sous l'action d'une **excitation sinusoïdale** :

$$(*) \quad f'' + 2kf' + \omega_0^2 f = \alpha\cos(\omega t).$$

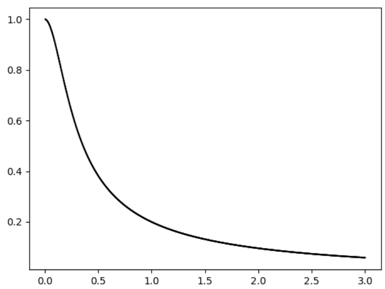
Cette équation différentielle admet comme solution particulière la fonction

$$t \mapsto \frac{\alpha}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2k\omega)^2}} \cos(\omega t + \psi) \ \text{ avec } \ \tan(\psi) = \frac{-2k\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

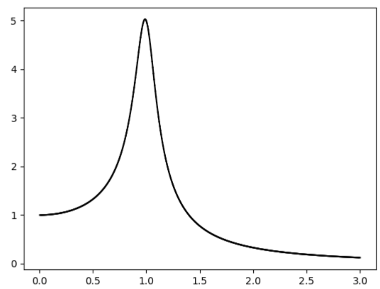
C'est une solution périodique dont l'amplitude est $\dfrac{\alpha}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2k\omega)^2}}$.

Si $k > \omega_0$ alors l'amplitude est une fonction décroissante de ω.

Si $k < \omega_0$ alors l'amplitude est maximale lorsque $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2k^2}$.

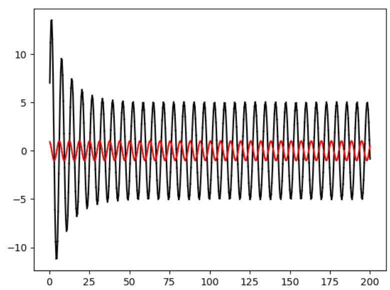


amplitude lorsque $f'' + 5f' + f = \cos(\omega t)$



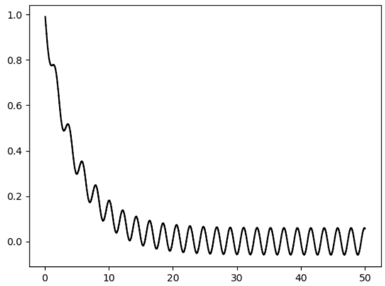
amplitude lorsque $f'' + f'/5 + f = \cos(\omega t)$

La valeur $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2k^2}$ correspond à une résonance mais contrairement au cas de l'oscillateur non amorti, la solution particulière reste bornée.

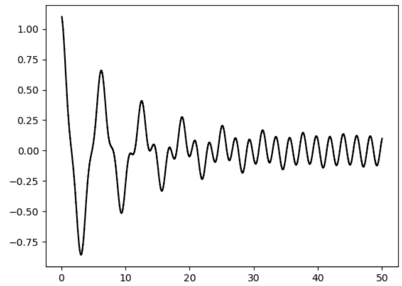


$f'' + f'/5 + f = \cos(t)$ *: résonance,* $\omega = \omega_0 = 1$
en rouge l'excitation et en noir la réponse de l'oscillateur

Comme dans le cas non amorti, les autres solutions de $(*)$ sont les sommes de la solution particulière donnée avec les solutions de l'équation $(*)^h$.



$f'' + 5f' + f = \cos(3t)$



$f'' + f'/5 + f = \cos(3t)$

3 Résolution d'équations différentielles classiques

On donne ici des méthodes de résolution de quelques équations différentielles classiques.

I Équation différentielle à variables séparables

Définition I.1 On appelle **équation différentielle à variables séparables** une équation différentielle du type $a(y)y' = b(t)$ où a est une fonction continue de y et b est une fonction continue de t.

Proposition I.1 *Soit $a(y)y' = b(t)$ une équation différentielle à variables séparables et soit A et B des primitives de a et b. Si $f : I \to \mathbf{R}$ est une solution de cette équation différentielle alors il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que $A \circ f = B + c$.*

Exemple I.1 Pour résoudre une équation différentielle du type $g(t, y') = 0$ on cherche une fonction h telle que $g(t, y') = 0$ soit équivalente à $y' = h(t)$. Pour résoudre une équation différentielle du type $g(y, y') = 0$ on cherche une fonction h telle que $g(y, y') = 0$ soit équivalente à $y' = g(y)$. Dans les deux cas on est ramené à une équation différentielle à variables séparables.

Exemple I.2 L'équation différentielle $y'' = a(y)$ où a est une fonction continue se ramène aux équations différentielles $(y')^2 = 2A(y) + c$ où A est une primitive de a et $c \in \mathbf{R}$. Ces dernières se ramènent à des équations à variables séparables en passant (prudemment) à la racine.

II Équation de Verhulst

Définition II.1 On appelle **équation de Verhulst** l'équation différentielle

$$y' = ay(1 - \frac{y}{K})$$

où a et K sont des réels strictement positifs donnés.

Cette équation différentielle est associée au modèle de Verhulst de croissance d'une population (1840). L'hypothèse faite est que plus la population est importante, plus l'accès à la nourriture est difficile. Avec l'introduction du facteur $(1 - \frac{y}{K})$ ce modèle corrige le modèle de Malthus.

Proposition II.1 *La fonction y est solution non nulle de l'équation de Verhulst*

$$y' = ay(1 - \frac{y}{K})$$

où a et K sont des réels strictement positifs donnés si et seulement si la fonction $z = \frac{1}{y}$ *est solution de l'équation différentielle*

$$z' + az = \frac{a}{K}.$$

III Équations d'Euler

Définition III.1 On appelle **équation d'Euler** une équation différentielle du type

$$t^2 y'' + aty' + by = g$$

où les $a, b \in \mathbf{R}$ et g est une fonctions continue sur un intervalle I de $]0, +\infty)$.

Proposition III.1 *Il existe des réels* $A, B \in \mathbf{R}$ *tels que la fonction y est solution non nulle de l'équation d'Euler*

$$t^2 y'' + aty' + by = g$$

si et seulement si la fonction $z = y \circ \exp$ *est solution d'une équation différentielle du type*

$$z'' + Az' + Bz = g \circ \exp.$$

IV Équation différentielle de Bernoulli

Définition IV.1 On appelle **équation de Bernoulli** une équation différentielle du type

$$y' = a(t)y + b(t)y^k$$

où a et b sont des fonctions continues définies sur un intervalle I et $k \in \mathbf{R}$.

Proposition IV.1 *La fonction y est solution de l'équation de Bernoulli*

$$y' = a(t)y + b(t)y^k$$

si et seulement si la fonction $z = y^{1-k}$ *est solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre*

$$\frac{1}{1-k} z' = a(t)z + b(t).$$

V Équation différentielle de Riccati

Définition V.1 On appelle **équation de Riccati** une équation différentielle du type

$$y' = a(t)y^2 + b(t)y + c(t)$$

où a, b et c sont des fonctions continues définies sur un intervalle I.

Proposition V.1 *Si y_0 est une solution de l'équation de Riccati*

$$y' = a(t)y^2 + b(t)y + c(t)$$

alors les autres solutions sont de la forme $y = y_0 + 1/u$ où u sont les solutions non nulles de l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$u' + (2a(t)y_0(t) + b(t))u + a(t) = 0.$$

Remarque V.1 Cette proposition montre qu'une fois connue une solution on résout complètement une équation différentielle de Ricatti en résolvant une équation différentielle linéaire du premier ordre. Toute la difficulté consiste donc à trouver une solution particulière y_0.

VI Équation différentielle de Clairaut

Définition VI.1 On appelle **équation de Clairaut** une équation différentielle du type

$$y = y't + b(y')$$

où b est une fonction deux fois dérivable définie sur un intervalle J.

Proposition VI.1 *Les fonctions affines $t \mapsto at + b(a)$ avec $a \in J$ sont des solutions de l'équation de Clairaut*

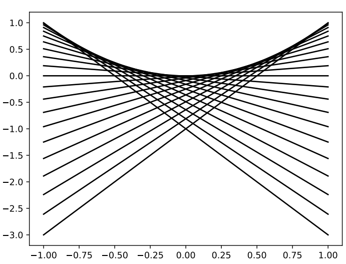
$$y = y't + b(y')$$

où b est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle J. On suppose que la dérivée seconde b'' ne s'annule pas et est de signe constant sur J. Alors il existe un intervalle I et $\theta : I \to J$ réciproque de b' tels que y définie par $y = \theta(-t)t + b(\theta(-t))$ est l'unique autre solution de l'équation de Clairaut définie sur I.

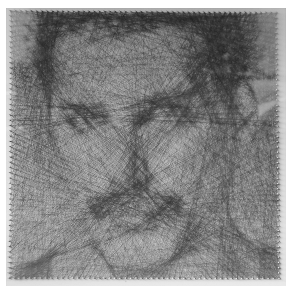
Exemple VI.1 Les solutions de l'équation différentielle de Clairaut

$$y = y't - \frac{y'^2}{4}$$

sont d'une part les fonctions affines $(2c)t - c^2$ où $c \in \mathbf{R}$ et d'autre part la fonction t^2.



équation de Clairaut



Clairaut revisité par Needle
(*ou Freddie Mercury au Loup à Rennes*)

4 Système d'équations différentielles linéaires

L'objet de cette partie est de donner une introduction de ce qui se passe en dimension 2 en s'intéressant en particulier à la situation linéaire.

I Définition, résultat général, exemples

Définition I.1 Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice carrée $n \times n$ à coefficients réels et C un n-uplet de fonctions :

$$A = (a_i^j)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

et

$$C = (c_i)_{1 \le i \le n} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad \text{avec } \ c_1, .., c_n \ \text{ des fonctions.}$$

Une **solution du système d'équations différentielles linéaires**

$$Y' = AY + C$$

est une famille de fonctions $Y = (y_1, ..., y_n)$ d'une variable réelle, définies sur un intervalle ouvert non vide I, dérivables et qui vérifient

$$\forall t \in I, Y'(t) = AY(t) + C(t)$$

c'est à dire

$$\forall i \in \{1, ...n\}, \forall t \in I, y_i'(t) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_i^j y_j(t) \right) + c_i(t).$$

Si $C = 0$ on parle de système **homogène**.

Définition I.2 Les lieux géométriques des solutions d'une équation différentielle ou d'un système d'équations différentielles linéaires sont appelées **trajectoires** ou **orbites**. Si ce lieu est un point il est appelé **orbite singulière**.

Définition I.3 Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ et $C \in \mathbf{R}^n$. L'application affine qui à un point $X = (x_1, ..., x_n)$ associe $AX + C$ s'appelle **champ de vecteurs affine**. Si $C = 0$ on parle de **champ de vecteurs linéaire** ou de **champ linéaire**.

Remarque I.1 Si $AX + C$ est un champ de vecteur affine alors ses orbites singulières sont les points de l'ensemble $\{AX + C = 0\}$ appelé **lieu singulier**.

Définition I.4 Soit $Y' = AY + C$ un système d'équations différentielles linéaires. Une **intégrale première** du système est une fonction f qui en restriction à chaque trajectoire est constante : quelle que soit la trajectoire $t \mapsto Y(t)$ du système l'application $t \mapsto f(Y(t))$ est constante.

Théorème (cas particulier du théorème de Cauchy-Lipschitz (1824), admis) Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$, soit $C \in \mathbf{R}^n$, soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbf{R}$ et $(t_0, Y^0) = (t_0, y_1^0, ...y_n^0) \in I \times \mathbf{R}^n$. Alors il existe une et une seule solution $Y = (y_1, ..., y_n)$ du système d'équations différentielles linéaires

$$Y' = AY + C$$

telle que pour tout $k = 1, ..., n$ la fonction y_k est définie sur I et $y_k(t_0) = y_k^0$.

Exemple I.1 Soit $(\lambda_1,...,\lambda_n) \in \mathbf{R}^n$. Alors les solutions Y du système

$$Y' = AY$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

sont les applications de la forme

$$t \in \mathbf{R} \mapsto (y_1 \exp(\lambda_1 t),...,y_n \exp(\lambda_n t))$$

avec $(y_1,...,y_n) \in \mathbf{R}^n$.
Les fonctions $|x_i|^{\lambda_j}/|x_j|^{\lambda_i}$, avec $i,j \in \{1,...,n\}$ et $i \neq j$, sont des intégrales premières (là où elles sont définies).

Exemple I.2 Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors les solutions Y du système

$$Y' = AY$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

sont les applications de la forme

$$t \in \mathbf{R} \mapsto ((y_1 + y_2 t)\exp(\lambda t), y_2 \exp(\lambda t))$$

avec $(y_1,y_2) \in \mathbf{R}^2$.

Exemple I.3 Soit $v,w \in \mathbf{R}$. Alors les solutions Y du système

$$Y' = AY$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} v & -w \\ w & v \end{pmatrix}$$

sont les applications de la forme

$$t \in \mathbf{R} \mapsto r\exp(vt)(\cos(wt+\phi), \sin(wt+\phi))$$

avec $(r,\phi) \in [0,+\infty) \times [0,2\pi[$.
Si $v = 0$ et $w \neq 0$ alors la fonction $x_1^2 + x_2^2$ est une intégrale première et les trajectoires sont des cercles centrés à l'origine.
Si $v \neq 0$ alors les trajectoires s'approchent toutes de l'origine et si de plus $w \neq 0$ elles le font en spiralant.

II Réduction en dimension 2 de la situation générale

Proposition II.1 *(réduction des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels) Soit $A \in M_2(\mathbf{R})$. Il existe $P \in M_2(\mathbf{R})$ inversible ($\det P \neq 0$) tel que $B = PAP^{-1}$ soit d'une des trois formes réduites suivantes :*

- *il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ tels que $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ (λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de B),*
- *il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ (λ est la valeur propre de B),*
- *il existe $v, w \in \mathbf{R}$ tels que $B = \begin{pmatrix} v & -w \\ w & v \end{pmatrix}$ ($v + iw$ et $v - iw$ sont les valeurs propres de B).*

Proposition II.2 *Soit $A, B, P \in M_n(\mathbf{R})$ avec P inversible et $B = PAP^{-1}$. Soit C et D des n-uplets de fonctions tels que pour tout t $D(t) = PC(t)P^{-1}$. Alors Y est solution du système*

$$Y' = AY + C$$

si et seulement si $Z = PY$ est solution du système

$$Z' = BZ + D.$$

Ces deux propositions sont les outils clés pour résoudre un système d'équations différentielles linéaires en dimension 2. Elles signifient qu'un changement linéaire de coordonnées permet de se ramener à une des situations décrites dans les exemples précédents. Si le système est homogène les solutions sont données dans les exemples. S'il y a un second membre, on utilise les méthodes développées dans le cas de la dimension 1. La situation la plus délicate est celle où les valeurs propres sont complexes non réelles.

Exemple II.1 Les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ vérifient $B = PAP^{-1}$. Or les solutions du système

$$Z' = BZ$$

sont les applications de la forme

$$t \in \mathbf{R} \mapsto (z_1 \exp(4t), z_2 \exp(6t))$$

avec $(z_1, z_2) \in \mathbf{R}^2$. Par conséquent les solutions du système

$$Y' = AY$$

sont les applications de la forme $A = P^{-1}B$ c'est à dire

$$t \in \mathbf{R} \mapsto (\frac{1}{\sqrt{2}} z_1 \exp(4t) + \frac{1}{\sqrt{2}} z_2 \exp(6t), \frac{-1}{\sqrt{2}} z_1 \exp(4t) + \frac{1}{\sqrt{2}} z_2 \exp(6t))$$

avec $(z_1, z_2) \in \mathbf{R}^2$ car $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Exemple II.2 On considère le système d'équations différentielles linéaires

$$Y' = AY + C$$

avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ avec c_1 et c_2 des fonctions de t.
Les solutions du système homogène sont les fonctions de la forme

$$t \in \mathbf{R} \mapsto r\exp(vt)(\cos(wt+\phi), \sin(wt+\phi))$$

avec $(r,\phi) \in [0,+\infty) \times [0,2\pi[$. Ces solutions s'écrivent aussi sous la forme

$$t \in \mathbf{R} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda\exp(vt)\cos(wt) + \mu\exp(vt)\sin(wt) \\ \lambda\exp(vt)\sin(wt) - \mu\exp(vt)\cos(wt) \end{pmatrix}$$

avec λ et μ des réels.
On va chercher une solution du système sous la forme

$$t \in \mathbf{R} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda\exp(vt)\cos(wt) + \mu\exp(vt)\sin(wt) \\ \lambda\exp(vt)\sin(wt) - \mu\exp(vt)\cos(wt) \end{pmatrix}$$

avec λ et μ non plus des réels mais des fonctions dérivables. La méthode est une extension de la méthode de la variation des constantes vue en dimension 1. Les dérivées λ' et μ' vérifient le système :

$$\begin{aligned} \lambda'(t)\exp(vt)\cos(wt) + \mu'(t)\exp(vt)\sin(wt) &= c_1(t) \\ \lambda'(t)\exp(vt)\sin(wt) - \mu'(t)\exp(vt)\cos(wt) &= c_2(t). \end{aligned}$$

La résolution du système donne

$$\begin{aligned} \lambda'(t) &= \exp(-vt)(\cos(wt)c_1(t) + \sin(wt)c_2(t)) \\ \mu'(t) &= \exp(-vt)(\sin(wt)c_1(t) - \cos(wt)c_2(t)). \end{aligned}$$

On obtient alors λ et μ par un calcul de primitive.

Exemple II.3 (relation entre équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et système d'équations différentielles linéaires) Résoudre l'équation différentielle $x'' = ax' + bx$ revient à résoudre le système

$$Y' = AY$$

avec

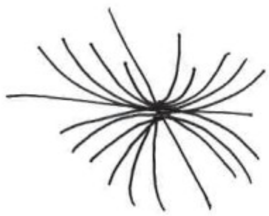
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}.$$

La fonction x est solution de $x'' = ax' + bx$ si et seulement si $Y = (x, x')$ est solution de $Y' = AY$.

III Noeud, col, centre, foyer

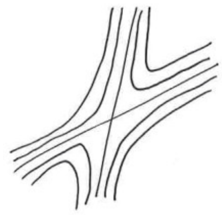
Définition III.1 Soit $A \in M_2(\mathbf{R})$ inversible.

- Si A admet deux valeurs propres réelles de même signe et qu'elle est diagonalisable on dit que l'équation différentielle $Y' = AY$ définit un **noeud**.



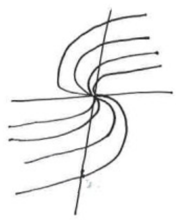
noeud

— Si A admet deux valeurs propres réelles de signes opposés, elle est donc diagonalisable, on dit que l'équation différentielle $Y' = AY$ définit un **col**.



col

— Si A a admet une seule valeur propre réelle et qu'elle n'est pas diagonalisable on dit que l'équation différentielle $Y' = AY$ définie un **noeud dégénéré**.

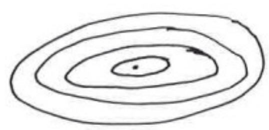


noeud dégénéré

— Si A admet deux valeurs propres complexes, non réelles et non imaginaires pures on dit que l'équation différentielle $Y' = AY$ définie un **foyer**.

foyer

— Si A admet deux valeurs propres imaginaires pures on dit que l'équation différentielle $Y' = AY$ définie un **centre**.



centre

Remarque III.1 Les dessins associés aux différents cas sont obtenus en traçant les trajectoires obtenus dans les exemples 1.1, 1.2 et 1.3 puis en faisant un changement linéaire de coordonnées comme le permettent les propositions 2.1 et 2.2. Ce type de dessin est ce qui s'appelle un **portrait de phase**.

Expliquons maintenant comment l'étude des éléments caractéristiques de A (trace, déterminant) permet de déterminer lequel de ces cas correspond au système $Y' = AY$.

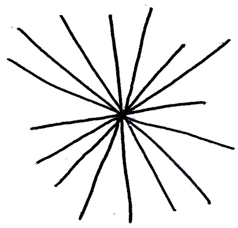
On suppose $\det(A) \neq$ et donc que A n'admet pas 0 comme valeur propre.

La trace $\operatorname{tr}(A)$ d'une matrice A de $M_2(\mathbf{R})$ est la somme de ses valeurs propres complexes. Son déterminant $\det(A)$ correspond à leur produit. Le nombre $\operatorname{tr}(A)^2 - 4\det(A)$ correspond au discriminant $\Delta(A)$ du polynôme caractéristique de A.

Les valeurs propres de A sont réelles distinctes si et seulement si $\Delta(A) > 0$. Dans ce cas elles sont non nulles et de même signe si et seulement si $\det(A) > 0$ et alors $Y' = AY$ correspond à un noeud et elles sont non nulles et de signes opposés si et seulement si $\det(A) < 0$ et alors $Y' = AY$ correspond à un col.

Si $\Delta(A) < 0$ alors les valeurs propres de A sont non réelles et distinctes. Dans ce cas elles sont non imaginaires si et seulement $\mathrm{tr}(A) \neq 0$ et alors $Y' = AY$ correspond à un foyer. En revanche si $\mathrm{tr}(A) = 0$ le système $Y' = AY$ correspond à un centre.

Si $\Delta = 0$ alors A ne possède qu'une valeur propre. Si A n'est pas diagonale alors le système $Y' = AY$ correspond au noeud dégénéré. Si A est diagonale alors toutes les trajectoires sont des demi-droites aboutissant à l'origine. On parle de **champ radial**.



champ radial

5 Le noeud-col

Dans le cas de la dimension 2, on vient d'explorer des situations dites linéaires. Nous allons donner maintenant deux cas non linéaires.

I Le noeud-col classique

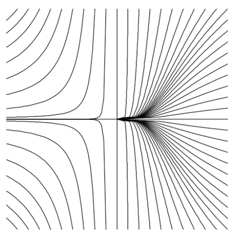
Le premier est le système donné par

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y \end{pmatrix}.$$

Les solutions sont les applications de la forme

$$t \mapsto \left(\frac{x_0}{1 - x_0 t}, y_0 \exp(t) \right).$$

La figure suivante représente les tracés de trajectoires.



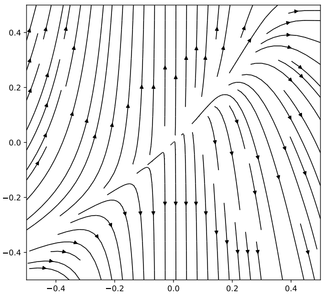
noeud-col

II Le noeud-col considéré par Euler

Le second est le système donné par

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y - x \end{pmatrix}$$

et étudié par Euler, qui a correspondu avec le malouin Maupertuis. Il apparaît dans un texte de 1746 appelé *De seriebus divergentibus*.



solutions de l'équation d'Euler

Une solution particulière est donnée par

$$t \mapsto \left(\frac{x_0}{1-x_0t}, \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\theta}\exp((t-\frac{1}{x_0})\theta)d\theta\right)$$

et les solutions sont de la forme

$$t \mapsto \left(\frac{x_0}{1-x_0t}, y_0\exp(t) + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\theta}\exp((t-\frac{1}{x_0})\theta)d\theta\right).$$

Ici les courbes solutions sont exprimées en fonction du temps. Il est intéressant lorsque $x>0$ d'exprimer y en fonction de x. Par calcul on obtient

$$y(x) = y_0\exp(\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x}) + \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\theta}\exp(-\frac{\theta}{x})d\theta.$$

On peut montrer que la fonction $x>0 \mapsto y(x)$ ainsi obtenue se prolonge en une fonction infiniment dérivable en 0 qui vérifie pour tout $N \in \mathbf{N}$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n n x^{n+1} + x^{N+1}\varepsilon_N(x)$$

où ε_N est une fonction continue sur $[0,+\infty)$ et qui vaut 0 en 0.

Ce système fait toujours l'objet de travaux de recherche. Euler utilise ce système pour calculer la somme

$$\sum(-1)^n n! = 1-1+2-6+24-120+720-...,$$

divergente dans le sens ordinaire, qu'il estime voisine de 0,59637255.

6 Quatre applications

On présente maintenant quatre modèles qui tentent d'expliquer des phénomènes, écologique pour deux d'entre eux et économiques pour les deux autres.

I La croissance économique selon Solow

(d'après des notes en ligne de Pierre Ratcliffe) L'économiste Solow (Prix Nobel d'économie 1987) s'intéresse à la modélisation mathématique de la croissance économique. Dans ces travaux intervient l'équation différentielle

$$y' = sy^{\alpha} - \lambda y$$

dans laquelle $\alpha \in [0,1]$, $s \in]0,1[$ et $\lambda > 0$ sont des paramètres et la solution y recherchée vérifie $y(0) > 0$.

Cette équation différentielle est une équation différentielle de Bernoulli et pour la résoudre on pose $e = y^{1-\alpha}$ pour se ramener à une équation différentielle linéaire. La fonction y inconnue est le **stock de capital par unité effective de travail**.

Pour obtenir cette équation différentielle Solow considère la **fonction de production de Cobb-Douglas** donnée par $F(K,A,L) = K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}$ où K est le **stock de capital**, A l'**efficacité du travail**, L le nombre de travailleurs et $\alpha \in]0,1[$. Le produit AL est la **quantité effective de travail** : un travailleur efficace vaut deux travailleurs peu efficaces. La fonction de production de Cobb-Douglas est dite à **rendements d'échelle constants** : en doublant la quantité effective de travail et en doublant le stock de capital on double la fonction production.

Le stock de capital par unité effective de travail est le quotient

$$y = \left(\frac{K}{AL}\right)$$

et la fonction de production **intensive** est le quotient

$$\frac{F}{AL} = \left(\frac{K}{AL}\right)^{\alpha} = y^{\alpha}.$$

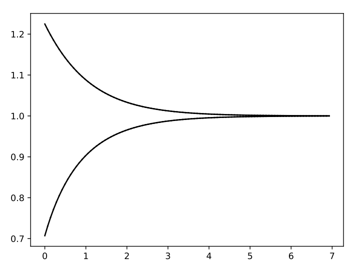
L'équation différentielle de Solow traduit l'hypothèse selon laquelle la vitesse d'évolution du stock de capital par unité effective de travail dépend linéairement de la fonction de production intensive et que le stock de capital par unité effective de travail subit un taux de dépréciation λ.

Puisque l'équation différentielle $y' = sy^{\alpha} - \lambda y$ est de Bernoulli on la transforme en posant $z = y^{1-\alpha}$ en l'équation différentielle

$$z' + (1-\alpha)\lambda z = (a-\alpha)s.$$

On résout cette seconde équation et, puisque $z = y^{1-\alpha}$, on obtient comme solution de l'équation différentielle de Solow qui vaut y_0 en $t = 0$ la fonction définie par

$$y(t) = \left(\frac{s}{\lambda} + \left(y_0^{1-\alpha} - \frac{s}{\lambda}\right)\exp(-(1-\alpha)\lambda t)\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$



modèle de Solow de croissance économique

On observe que la fonction constante $\left(\frac{s}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ est solution de l'équation différentielle. C'est ce qui est appelé un **point d'équilibre**. Toutes les autres solutions ont pour limite commune en $+\infty$ la valeur $\left(\frac{s}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$. C'est pour quoi ce point d'équilibre est dit **stable**.

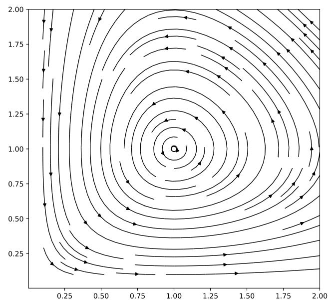
II Le modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra

(d'après des notes en ligne de Sandrine Caruso et celles de Grégory Vial)

Le système

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - bxy \\ -cy + dxy \end{pmatrix}$$

modélise selon Lotka et Volterra l'évolution des effectifs de deux populations en concurrence composées d'une part de proies dont l'effectif est la fonction x et d'autre part de prédateurs dont l'effectif est la fonction y.



système de Lotka-Volterra lorsque $a = b = c = d = 1$

Pour obtenir ce système Lotka et Volterra font les hypothèses suivantes. La reproduction des proies, supposée proportionnelle à leur effectif (loi de Malthus), est représentée par ax et leur disparition, représentée par $-bxy$, est proportionnelle à la probabilité de rencontre avec les prédateurs. La reproduction des prédateurs, supposée proportionnelle à leur effectif et au nombre de proies, est représentée par dxy et leur disparition, donnée par $-cy$, est supposée se produire lorsqu'ils sont trop nombreux et en concurrence pour la nourriture.

Puisque les effectifs x et y sont des nombres positifs ou nuls il est intéressant de consacrer l'étude de ce modèle dans le cadran positif $\{x, y \geq 0\}$. On observe que les demi-droites $\{x = 0, y > 0\}$ et $\{y = 0, x > 0\}$ sont des orbites du système et que le point de coordonnées $x = \frac{c}{d}, y = \frac{a}{b}$ est l'unique point singulier du système situé dans le cadran $\{x, y > 0\}$. La proposition suivante permet de comprendre les autres trajectoires de ce cadran.

Proposition II.1 *La fonction H définie par $H(x,y) = dx - c\ln(x) + by - a\ln(y)$ est constante sur les solutions du système de Lotka-Volterra*

On peut déduire de cette proposition que, selon ce modèle, les variations des populations de proies et de prédateurs sont périodiques : les trajectoires situées dans le cadran $\{x, y > 0\}$ sont le point singulier ou des orbites périodiques.

III Les cycles économiques de Goodwin

Goodwin, économiste influencé par Keynes et Marx, transpose en économie le modèle écologique de Lotka-Volterra. Le taux d'emploi remplace les proies et la part du salaire dans la production les prédateurs. Modulo des hypothèses sur les relations entre capital, production, investissement, profit, emploi réel, offre de travail, salaire, Goodwin établit que le système

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - bxy \\ -cy + dxy \end{pmatrix}$$

modélise les évolutions du taux d'emploi x et de la part y du salaire dans la production.

Comme chez Lotka et Volterra pour les proies et les prédateurs, selon le modèle de Goodwin, les variations du taux d'emploi x et de la part y du salaire dans la production sont périodiques.

IV Le modèle proie-prédateur de Holling et MacArthur-Rosenzweig

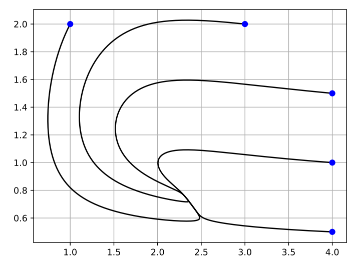
(d'après le livre de Auger, Lett et Poggiale, un article en ligne de Chazottes et Monticelli et un programme sous Python de Seguin) Le modèle de Holling et MacArthur-Rosenzweig est un raffinement du modèle de Lotka-Volterra. Il est donné par le système

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\left(1-\dfrac{x}{K}\right)-\dfrac{xy}{1+x} \\ -ecy+e\dfrac{xy}{1+x} \end{pmatrix}.$$

Pour obtenir ce système Holling et MacArthur-Rosenzweig font les hypothèses suivantes. La reproduction des proies, supposée suivre une loi de Verhulst, est représentée par $x(1-\frac{x}{K})$ et leur disparition, représentée par $-\frac{xy}{1+x}$, est supposée presque proportionnelle à la probabilité de rencontre avec les prédateurs quand les proies sont peu nombreuses et, lorsqu'elles sont très nombreuses, presque proportionnelle au nombre de prédateurs. La reproduction des prédateurs, supposée proportionnelle aux proies ingurgitées par unité temps, est représentée par $e\frac{xy}{1+x}$ et leur disparition, donnée par $-ecy$, est supposée se produire lorsqu'ils sont trop nombreux et en concurrence pour la nourriture. Le paramètre e introduit est le *taux de conversion des proies en prédateurs*.

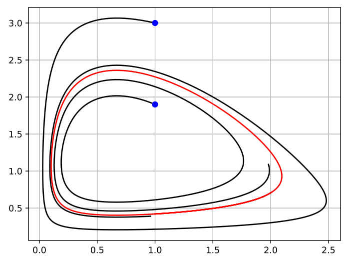
Pour conclure ce cours on va utiliser le modèle de Holling et MacArthur-Rosenzweig pour introduire succinctement les notions d'*attractivité* et de **stabilité** qui sont deux notions fondamentales dans la théorie des équations différentielles.

Dans ce modèle les trajectoires ne sont plus périodiques. En revanche, suivant les valeurs des paramètres on rencontre des situations assez différentes. On peut choisir les paramètres de telle sorte que toutes les trajectoires du cadran $\{x > 0, y > 0\}$ soit attirées par un point singulier **stable**.



système de Holling et MacArthur-Rosenzweig
$K = 3, c = 0.7, e = 1$

On peut aussi choisir les paramètres de telle sorte qu'il existe une trajectoire périodique qui **attire** toutes les trajectoires voisines. C'est ce qu'on appelle un **cycle limite attractif**. Il est **topologiquement stable** : si on modifie un tout petit peu le système, le système modifié possède encore un cycle limite attractif voisin du cycle limite initial. Cette propriété de *stabilité* n'était pas vérifiée par les trajectoires périodiques du système de Lotka-Volterra.

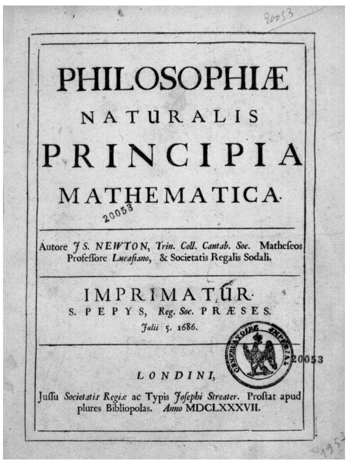


système de Holling et MacArthur-Rosenzweig
$K = 3, c = 0.4, e = 1$

Le fait que suivant les valeurs des paramètres les portraits de phase changent radicalement s'appelle une **bifurcation**. Celle qui est décrite ici s'appelle la bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf.

7 Noms et dates

Banerjee (1961-), Ampère (1775-1836), Andronov (1901-1952), Bernoulli (1654-1705), Cauchy (1789-1857), du Châtelet (1706-1749), Clairaut (1713-1765), Cobb (1875-1949), Douglas (1892-1976), Duflo (1972-), Euler (1707-1783), Faraday (1791-1867), Goodwin (1913-1996), Holling (1930-), Hopf (1902-1983), Keynes (1883-1946), Kirchhoff (1824-1887), Leibniz (1646-1716), Lipschitz (1832-1903), Lotka (1880-1949), Ohm (1789-1854), MacArthur (1930-1972), Malthus (1766-1834), Marx (1818-1883), Maupertuis (1698-1759), Neper (1550-1617), Newton (1643-1727), Poincaré (1854-1912), Riccati (1676-1754), Robinson (1903-1983), Rosenzweig (1941-), Rutherford (1871-1937), Soddy (1877-1956), Solow (1924-), Verhulst (1804-1849), Volterra (1860-1940).



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore JS. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

Philosophiae naturalis principia mathematica de Newton
Crédit : Bibliothèque de l'Observatoire de Paris